

Received: 24 July 2021

Revised: 4 December 2021

Accepted: 9 December 2021

การคำนวณหาค่าระยะทางและพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้า ที่เคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ ขึ้นอยู่กับรัศมีของวงโคจร $F(R)$

Reckoning of Distance and Effective Potential of Motion for Change Particle Polar Coordinates under Central Force Function of Trigonometry and Orbital Radius $F(R)$

จิราวรรณ ทรัพย์ทิพย์¹ ปิยรัตน์ มุลศรี¹ และ อาติศย์ หู้เต็ม^{2*}

Chirawan Saptip¹ Piyarat Moonsri¹ and Artit Hudem^{2*}

¹Science Education, Faculty of Science and Technology, PhetchabunRajabhat University

²Physics Division, Faculty of Science and Technology, PhetchabunRajabhatUniversity

*corresponding author e-mail : artithudem@pcru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้จึงเริ่มจากการสร้างแรงที่ได้จากการศึกษาของเคปเลอร์และกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ในการศึกษาลักษณะการเคลื่อนที่ของวงโคจรภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง โดยใช้แคลคูลัสเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ในการคำนวณหาค่าระยะทางและศักย์ยังผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ขึ้นอยู่กับรัศมีของวงโคจร จากนั้นนำผลเฉลยที่ได้ไปพล็อตกราฟด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบลักษณะของวงโคจรอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ขึ้นอยู่กับรัศมี เพื่อแสดงให้เห็นว่าเมื่อประจุ มวล ค่าตัวแปร เปลี่ยนแปลงไปจะส่งผลต่อระยะทางและพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้แรงที่ขึ้นอยู่กับรัศมีของวงโคจร โดยมีลักษณะของการเคลื่อนที่คล้ายวงรี

คำสำคัญ: แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง, ระยะทาง, ศักย์ยังผล

Abstract

This research begins with generating the forces obtained by studying Kepler's law, and Newton's law in a broader study. The story under the force enters the system using an in-depth drill of differential equations in practice to determine the path and the integrity of the channel that the subtraction enters into a system that increases depending on the radius of

the orbit form. Then bring the results to plot with a computer program to study and discuss Bravo at the booth under the force into a radius dependent to shows that when the charge mass and parameter changes will affect distance and potential energy as a result of particles moving under the forces that depends on the radius of the orbit. With the nature of movement like an ellipse.

Keywords: Central Force, Distance, Effective Potential

บทนำ

กฎของเคปเลอร์เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ไว้ 3 ข้อที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ในระบบสุริยะ ซึ่งค้นพบโดย โยฮันเนสเคปเลอร์ เมื่อ พ.ศ. 2114 – พ.ศ. 2173 เริ่มศึกษาจากการสังเกตการณ์ของไทโค บราห์ นักดาราศาสตร์ชาวเดนมาร์กเมื่อ พ.ศ. 2148 จน เคปเลอร์ได้พบว่าตำแหน่งของดาวเคราะห์ของบราห์เป็นไปตามกฎง่ายๆ ทางคณิตศาสตร์ โดย เคปเลอร์ได้เสนอว่าโลกเคลื่อนที่เป็นวงรีรอบดวงอาทิตย์และได้คำนวณเกี่ยวกับความเร็วของการเคลื่อนที่ที่มีความผันแปร ซึ่งเป็นแนวคิดแห่งการเปลี่ยนแปลงความรู้ทางดาราศาสตร์และฟิสิกส์ โดยถือว่าเป็นการอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ได้อย่างชัดเจนต่อมา ไอแซกนิวตัน ได้สรุปกฎของเคปเลอร์ มีความสัมพันธ์กับกฎการเคลื่อนที่และกฎความโน้มถ่วงซึ่งใช้แคลคูลัสที่เขาสร้างขึ้น มาอธิบายความสัมพันธ์ โดยกฎการเคลื่อนที่ของเคปเลอร์ ได้แก่ กฎข้อที่ 1 (กฎของวงรี) "ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดศูนย์กลาง" กฎข้อที่ 2 เวลาที่ดาวเคราะห์ใช้โคจรรอบดวงอาทิตย์ โดยคาบเวลาที่เท่ากัน จะสามารถกวาดพื้นที่ได้เท่ากัน และกฎข้อที่ 3 กำลังสองของคาบที่โคจรรอบดวงอาทิตย์ แปรผันตามกำลังสามของระยะทางที่ห่างจากดวงอาทิตย์

($T^2 / R^3 = k, k$ เป็นค่าคงที่) งานวิจัยนี้จะพิจารณาว่าประจุไฟฟ้า ρ มีการเคลื่อนที่ตามวงโคจรระหว่างประจุอิเล็กตรอนเคลื่อนที่รอบนิวเคลียสซึ่งจะคำนวณหาค่าระยะทางและศักย์ยังผลของอนุภาคที่ถูกเคลื่อนที่แบบพิกัดเชิงขั้วภายใต้แรงที่ขึ้นอยู่กับรัศมีวงโคจร

$$F(R) = -\frac{1}{R^2} \left(\epsilon \rho^2 \cos^2 \alpha + \frac{\eta \rho^2 \sin^2 \alpha}{(1-e^2)^2} - \frac{\gamma}{R^3} \right)$$

เพื่ออธิบายว่า วงโคจรของอนุภาคมีการเคลื่อนที่เป็นวงรี เนื่องจากมีฟังก์ชันที่มารบกวนแรงเข้าสู่ศูนย์กลาง (วัชรพงษ์ และอาทิตย์, 2561)

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาระยะทางและศักย์ยังผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้ $F(R)$
2. เพื่อเปรียบเทียบลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้ $F(R)$

วิธีดำเนินการวิจัย

การคำนวณหาระยะทางของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้ $F(R)$ โดยพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้แรง (Fung, 2012)

$$F(R) = -\frac{1}{R^2} \left(\varepsilon \rho^2 \cos^2 \alpha + \frac{\eta \rho^2 \sin^2 \alpha}{(1-e^2)^2} - \frac{\gamma}{R^3} \right)$$

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -u^2 \varepsilon \rho^2 \cos^2 \alpha - \frac{\eta \rho^2 u^2 \sin^2 \alpha}{(1-e^2)^2} - \gamma u^3 \quad (1)$$

โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 แบบไม่เอกพันธ์ จาก

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

ซึ่งเป็นสมการวงโคจร (รัชนี, 2558; Atam, 1990) แทนสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{\gamma m}{\ell^2}\right) u = \frac{\varepsilon \rho^2 m \cos^2 \alpha}{\ell^2} + \frac{\eta \rho^2 m \sin^2 \alpha}{\ell^2 (1-e^2)^2} \quad (2)$$

หาค่า u โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 แบบไม่เอกพันธ์

$$u(\alpha) = u_c(\alpha) + u_p(\alpha) \quad (3)$$

หาค่า $u_c(\alpha)$ จาก $\frac{d^2 u}{d\alpha^2} + \left(1 - \frac{\gamma m}{\ell^2}\right) u = 0$ กำหนดให้ $\hbar^2 = \left(1 - \frac{\gamma m}{\ell^2}\right)$ จะได้ $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \hbar^2 u = 0$

และหาค่า $u_c(\alpha)$ จาก $u_c(\alpha) = e^{p(\alpha)} (A \cos(\hbar \alpha) + B \sin(\hbar \alpha))$

$$u_c(\alpha) = A \cos(\hbar \alpha) + B \sin(\hbar \alpha) \quad ; p(\alpha) = 0 \quad (4)$$

กรณีที่มีเฟสเริ่มต้น $A = P \cos(\phi)$, $B = P \sin(\phi)$, $P = \text{Amplitude}(A)$ จะได้

$$u_c(\alpha) = A \cos(\phi) \cos(\hbar \alpha) + A \sin(\phi) \sin(\hbar \alpha)$$

$$u_c(\alpha) = A \cos(\hbar \alpha - \phi) \quad (5)$$

จากสมการที่ (4) ซึ่งเป็นผลเฉลยเอกพันธ์ เราจึงกำหนดให้

$$u_1(\alpha) = \cos(\hbar \alpha), u_2(\alpha) = \sin(\hbar \alpha) \text{ และเพื่อนำไปหาค่า } u_p(\alpha) \text{ จาก}$$

$$u_p(\alpha) = s_1(\alpha) \cdot u_1(\alpha) + s_2(\alpha) \cdot u_2(\alpha) \text{ โดยใช้วิธีรอนสเกียน (Susan, 2004 ; Roel,$$

2001) จากนั้น เราทำการหาค่า w, w_1 โดย Determinant ดังนี้ $\frac{ds_1(\alpha)}{d\alpha} = \frac{w_1}{w}$,

$$w = \begin{vmatrix} u_1(\alpha) & u_2(\alpha) \\ u_1'(\alpha) & u_2'(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\hbar \alpha) & \sin(\hbar \alpha) \\ -\hbar \sin(\hbar \alpha) & \hbar \cos(\hbar \alpha) \end{vmatrix} = \hbar$$

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \begin{vmatrix} 0 & u_2(\alpha) \\ F_1(\alpha) & u'_2(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin(h\alpha) \\ \frac{\varepsilon\rho^2 m \cos^2 \alpha}{\ell^2} + \frac{\eta\rho^2 m \sin^2 \alpha}{\ell^2(1-e^2)^2} & h \cos(h\alpha) \end{vmatrix} \\
 w_1 &= -\sin(h\alpha) \left(\frac{\varepsilon\rho^2 m \cos^2 \alpha}{\ell^2} + \frac{\eta\rho^2 m \sin^2 \alpha}{\ell^2(1-e^2)^2} \right) \\
 \text{หา } ds_1(\alpha) \\
 \int ds_1(\alpha) &= \int \left(\frac{-\sin(h\alpha)}{h} \left(\frac{\varepsilon\rho^2 m \cos^2 \alpha}{\ell^2} + \frac{\eta\rho^2 m \sin^2 \alpha}{\ell^2(1-e^2)^2} \right) \right) d\alpha \\
 s_1(\alpha) &= \frac{\varepsilon\rho^2 m}{\ell^2 h} \int \sin(h\alpha) \cos^2(\alpha) d\alpha - \frac{\eta\rho^2 m}{\ell^2 h(1-e^2)^2} \int \sin(h\alpha) \sin^2(\alpha) d\alpha \\
 \text{หาค่า } \int \sin(h\alpha) \cos^2(\alpha) d\alpha \text{ และ } \int \sin(h\alpha) \sin^2(\alpha) d\alpha \\
 \int \sin(h\alpha) \cos^2(\alpha) d\alpha &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos(h\alpha)}{h} - \frac{\cos(h+2)\alpha}{2(h+2)} - \frac{\cos(h-2)\alpha}{2(h-2)} \right) \\
 \text{ต่อมาคำนวณการอินทิเกรต} \\
 \int \sin(h\alpha) \sin^2(\alpha) d\alpha &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos(h\alpha)}{h} + \frac{\cos(h+2)\alpha}{2(h+2)} + \frac{\cos(h-2)\alpha}{2(h-2)} \right) \\
 s_1(\alpha) &= -\frac{\varepsilon\rho^2 m}{\ell^2 h} \left(\frac{-\cos(h\alpha)}{2h} - \frac{\cos(h+2)\alpha}{4(h+2)} - \frac{\cos(h-2)\alpha}{4(h-2)} \right) \\
 &\quad - \frac{\eta\rho^2 m}{\ell^2 h(1-e^2)^2} \left(\frac{-\cos(h\alpha)}{2h} + \frac{\cos(h+2)\alpha}{4(h+2)} + \frac{\cos(h-2)\alpha}{4(h-2)} \right) \quad (6) \\
 \text{หา } ds_2(\alpha) \text{ จาก } \frac{ds_2(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{w_2}{w} \\
 w &= \begin{vmatrix} u_1(\alpha) & u_2(\alpha) \\ u'_1(\alpha) & u'_2(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(h\alpha) & \sin(h\alpha) \\ -h \sin(h\alpha) & h \cos(h\alpha) \end{vmatrix} = h \cos^2(h\alpha) + h \sin^2(h\alpha) \\
 w_2 &= \begin{vmatrix} u_1(\alpha) & 0 \\ u'_1(\alpha) & F_1(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(h\alpha) & 0 \\ -h \sin(h\alpha) & \frac{\varepsilon\rho^2 m \cos^2 \alpha}{\ell^2} + \frac{\eta\rho^2 m \sin^2 \alpha}{\ell^2(1-e^2)^2} \end{vmatrix} \\
 w_2 &= \cos(h\alpha) \left(\frac{\varepsilon\rho^2 m \cos^2 \alpha}{\ell^2} + \frac{\eta\rho^2 m \sin^2 \alpha}{\ell^2(1-e^2)^2} \right) \\
 \int ds_2(\alpha) &= \int \left(\frac{\cos(h\alpha)}{h} \left(\frac{\varepsilon\rho^2 m \cos^2 \alpha}{\ell^2} + \frac{\eta\rho^2 m \sin^2 \alpha}{\ell^2(1-e^2)^2} \right) \right) d\alpha \\
 s_2(\alpha) &= \frac{\varepsilon\rho^2 m}{\ell^2 h} \int \cos(h\alpha) \cos^2(\alpha) d\alpha + \frac{\eta\rho^2 m}{\ell^2 h(1-e^2)^2} \int \cos(h\alpha) \sin^2(\alpha) d\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{หาค่า } \int \cos(\hbar\alpha) \cos^2(\alpha) d\alpha \text{ และ } \int \cos(\hbar\alpha) \sin^2(\alpha) d\alpha \\ & \int \cos(\hbar\alpha) \cos^2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\hbar\alpha)}{\hbar} + \frac{\sin(\hbar+2)\alpha}{2(\hbar+2)} + \frac{\sin(\hbar-2)\alpha}{2(\hbar-2)} \right) \\ & \int \cos(\hbar\alpha) \sin^2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\hbar\alpha)}{\hbar} - \frac{\sin(\hbar+2)\alpha}{2(\hbar+2)} - \frac{\sin(\hbar-2)\alpha}{2(\hbar-2)} \right) \text{ จะได้} \\ & s_2(\alpha) = \frac{\varepsilon\rho^2 m}{\ell^2 \hbar} \left(\frac{\sin(\hbar\alpha)}{2\hbar} + \frac{\sin(\hbar+2)\alpha}{4(\hbar+2)} + \frac{\sin(\hbar-2)\alpha}{4(\hbar-2)} \right) \\ & \quad + \frac{\eta\rho^2 m}{\ell^2 \hbar (1-e^2)^2} \left(\frac{\sin(\hbar\alpha)}{2\hbar} - \frac{\sin(\hbar+2)\alpha}{4(\hbar+2)} - \frac{\sin(\hbar-2)\alpha}{4(\hbar-2)} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

แทนสมการที่ (6) และ (7) จะได้ $u_p(\alpha) = s_1(\alpha) \cdot u_1(\alpha) + s_2(\alpha) \cdot u_2(\alpha)$

$$\begin{aligned} u_p(\alpha) = & -\frac{\varepsilon\rho^2 m \cos(\hbar\alpha)}{\ell^2 \hbar} \left(\frac{-\cos(\hbar\alpha)}{2\hbar} - \frac{\cos(\hbar+2)\alpha}{4(\hbar+2)} - \frac{\cos(\hbar-2)\alpha}{4(\hbar-2)} \right) \\ & - \frac{\eta\rho^2 m \cos(\hbar\alpha)}{\ell^2 \hbar (1-e^2)^2} \left(\frac{-\cos(\hbar\alpha)}{2\hbar} + \frac{\cos(\hbar+2)\alpha}{4(\hbar+2)} + \frac{\cos(\hbar-2)\alpha}{4(\hbar-2)} \right) \\ & + \frac{\varepsilon\rho^2 m \sin(\hbar\alpha)}{\ell^2 \hbar} \left(\frac{\sin(\hbar\alpha)}{2\hbar} + \frac{\sin(\hbar+2)\alpha}{4(\hbar+2)} + \frac{\sin(\hbar-2)\alpha}{4(\hbar-2)} \right) \\ & + \frac{\eta\rho^2 m \sin(\hbar\alpha)}{\ell^2 \hbar (1-e^2)^2} \left(\frac{\sin(\hbar\alpha)}{2\hbar} - \frac{\sin(\hbar+2)\alpha}{4(\hbar+2)} - \frac{\sin(\hbar-2)\alpha}{4(\hbar-2)} \right) \quad (8) \end{aligned}$$

แทนสมการที่(5) และ(8)ลงในสมการที่(3) จะได้ $u(\alpha) = u_c(\alpha) + u_p(\alpha)$

$$\begin{aligned} u(\alpha) = & A \cos(\hbar\alpha - \phi) + \frac{\varepsilon\rho^2 m}{\ell^2 \hbar} \left(\frac{\cos^2(\hbar\alpha)}{2\hbar} + \frac{\sin^2(\hbar\alpha)}{2\hbar} + \frac{\cos(\hbar+2)\alpha \cos(\hbar\alpha)}{4(\hbar+2)} + \frac{\sin(\hbar+2)\alpha \sin(\hbar\alpha)}{4(\hbar+2)} \right. \\ & \left. + \frac{\cos(\hbar-2)\alpha \cos(\hbar\alpha)}{4(\hbar-2)} + \frac{\sin(\hbar-2)\alpha \sin(\hbar\alpha)}{4(\hbar-2)} \right) \\ & + \frac{\eta\rho^2 m}{\ell^2 \hbar (1-e^2)^2} \left(\frac{\cos^2(\hbar\alpha)}{2\hbar} + \frac{\sin^2(\hbar\alpha)}{2\hbar} - \frac{\cos(\hbar+2)\alpha \cos(\hbar\alpha)}{4(\hbar+2)} - \frac{\sin(\hbar+2)\alpha \sin(\hbar\alpha)}{4(\hbar+2)} \right. \\ & \left. - \frac{\cos(\hbar-2)\alpha \cos(\hbar\alpha)}{4(\hbar-2)} - \frac{\sin(\hbar-2)\alpha \sin(\hbar\alpha)}{4(\hbar-2)} \right) \\ u(\alpha) = & A \cos(\hbar\alpha - \phi) + \frac{\varepsilon\rho^2 m}{2\ell^2 \hbar} \left(\frac{1}{\hbar} + \frac{\hbar \cos(2\alpha)}{(\hbar^2 - 4)} \right) + \frac{\eta\rho^2 m}{2\ell^2 \hbar (1-e^2)^2} \left(\frac{1}{\hbar} - \frac{\hbar \cos(2\alpha)}{(\hbar^2 - 4)} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

กำหนดให้เฟสเริ่มต้นเป็น 0 จะได้ระยะทางของอนุภาค

$$R(\alpha) = \frac{1}{A \cos(\hbar\alpha) + \frac{\varepsilon\rho^2 m}{2\ell^2 \hbar} \left(\frac{1}{\hbar} + \frac{\hbar \cos(2\alpha)}{(\hbar^2 - 4)} \right) + \frac{\eta\rho^2 m}{2\ell^2 \hbar (1-e^2)^2} \left(\frac{1}{\hbar} - \frac{\hbar \cos(2\alpha)}{(\hbar^2 - 4)} \right)} \quad (10)$$

สมการที่ (10) คือสมการแสดงค่าระยะทางของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้ $F(R)$ ต่อไป
เป็นการคำนวณหาศักย์ยังผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้ $F(R)$ จากสมการ

$F(R) = -\nabla V$ กำหนดให้มุม α มีค่าคงที่ $-\int dV = \int F(R) dR$ จะได้

$$V(R) = \varepsilon \rho^2 \cos^2 \alpha + \frac{\eta \rho^2 \sin^2 \alpha}{(1-e^2)^2} \int \frac{1}{R^2} dR + \gamma \int \frac{1}{R^3} dR \text{ จะได้}$$

$$V(R) = -\frac{1}{R} \left(\varepsilon \rho^2 \cos^2 \alpha + \frac{\eta \rho^2 \sin^2 \alpha}{(1-e^2)^2} \right) - \frac{\gamma}{2R^2} \quad (11)$$

จากสมการหาค่าศักย์ยังผลของอนุภาค $V_{eff} = \frac{\ell^2}{2mR^2} + V(R)$ แทนสมการที่ (11) จะได้

$$V_{eff} = \frac{\ell^2}{2mR^2} - \frac{1}{R} \left(\varepsilon \rho^2 \cos^2 \alpha + \frac{\eta \rho^2 \sin^2 \alpha}{(1-e^2)^2} \right) - \frac{\gamma}{2R^2} \quad (12)$$

สมการที่ (12) คือสมการแสดงค่าศักย์ยังผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้ $F(R)$ การเปรียบเทียบลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้ $F(R)$ ในการเปรียบเทียบลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่นั้น จะทำการเปรียบเทียบทั้งหมด 2 ตอนด้วยกัน คือเปรียบเทียบค่าระยะทาง และค่าศักย์ยังผล ซึ่งในขั้นตอนการทดลองจะมีการเปลี่ยนค่าตัวแปรต่าง ๆ ดังตาราง

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบค่าระยะทางของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้ $F(R)$

ตัวแปรต้น	ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม
$\rho_1 = 3.0 \times 10^{-6}, \rho_2 = 3.5 \times 10^{-6}$ $\rho_3 = 4.0 \times 10^{-6}, \rho_4 = 4.5 \times 10^{-6}$	ระยะทางของ อนุภาคที่เคลื่อนที่	$\gamma = 0.6, A = 1, m = 0.5$ $\ell = 0.55, \alpha = 0 \rightarrow 2\pi, \phi = 0$ $\varepsilon = 9 \times 10^9, \eta = 0.5, e = 0.5$
$m_1 = 0.470, m_2 = 0.475$ $m_3 = 0.480, m_4 = 0.485$	ระยะทางของ อนุภาคที่เคลื่อนที่	$\gamma = 0.6, A = 1, \rho = 3.0 \times 10^{-6}$ $\ell = 0.55, \alpha = 0 - 2\pi, \phi = 0$ $\varepsilon = 9 \times 10^9, \eta = 0.5, e = 0.5$
$\ell_1 = 0.552, \ell_2 = 0.554$ $\ell_3 = 0.556, \ell_4 = 0.558$	ระยะทางของ อนุภาคที่เคลื่อนที่	$\gamma = 0.6, A = 1, \rho = 5 \times 10^{-6}$ $m = 0.5, \alpha = 0 - 2\pi, \phi = 0$ $\varepsilon = 9 \times 10^9, \eta = 0.5, e = 0.5$
$\gamma_1 = 0.597, \gamma_2 = 0.598$ $\gamma_3 = 0.599, \gamma_4 = 0.600$	ระยะทางของ อนุภาคที่เคลื่อนที่	$A = 1, \ell = 0.55, \rho = 5 \times 10^{-6}$ $m = 0.5, \alpha = 0 - 2\pi, \phi = 0$ $\varepsilon = 9 \times 10^9, \eta = 0.5, e = 0.5$

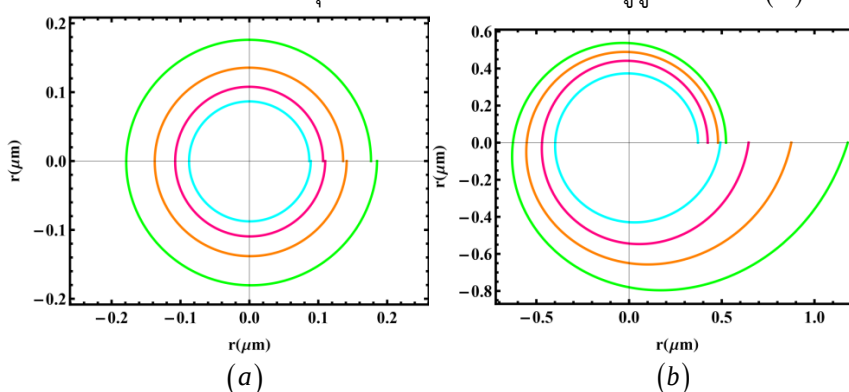
ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบค่าศักย์ยังผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้ $F(R)$

ตัวแปรต้น	ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม
$\rho_1 = 3.0 \times 10^{-6}, \rho_2 = 4.5 \times 10^{-6}$ $\rho_3 = 6.0 \times 10^{-6}, \rho_4 = 7.5 \times 10^{-6}$	ค่าศักย์ยังผลของ อนุภาคที่เคลื่อนที่	$\ell = 0.55, m = 0.50, R = 0 - 0.1$ $\varepsilon = 9 \times 10^9, \alpha = 270, \eta = 0.5$ $e = 0.5, \gamma = 0.6$

ตัวแปรต้น	ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม
$m_1 = 0.480, m_2 = 0.495$ $m_3 = 0.490, m_4 = 0.495$	ค่าศักย์ยังผลของ อนุภาคที่เคลื่อนที่	$\ell = 0.55, \rho = 5 \times 10^{-6}, R = 0 - 0.1$ $\varepsilon = 9 \times 10^9, \alpha = 270, \eta = 0.5$ $e = 0.5, \gamma = 0.6$
$\ell_1 = 0.5478, \ell_2 = 0.5479$ $\ell_3 = 0.5480, \ell_4 = 0.5481$	ค่าศักย์ยังผลของ อนุภาคที่เคลื่อนที่	$m = 0.50, \rho = 5 \times 10^{-6}, R = 0 - 0.1$ $\varepsilon = 9 \times 10^9, \alpha = 270, \eta = 0.5$ $e = 0.5, \gamma = 0.6$
$\gamma_1 = 0.602, \gamma_2 = 0.603$ $\gamma_3 = 0.604, \gamma_4 = 0.605$	ค่าศักย์ยังผลของ อนุภาคที่เคลื่อนที่	$m = 0.50, \rho = 5 \times 10^{-6}, R = 0 - 0.1$ $\varepsilon = 9 \times 10^9, \alpha = 270, \eta = 0.5$ $e = 0.5, \ell = 0.55$

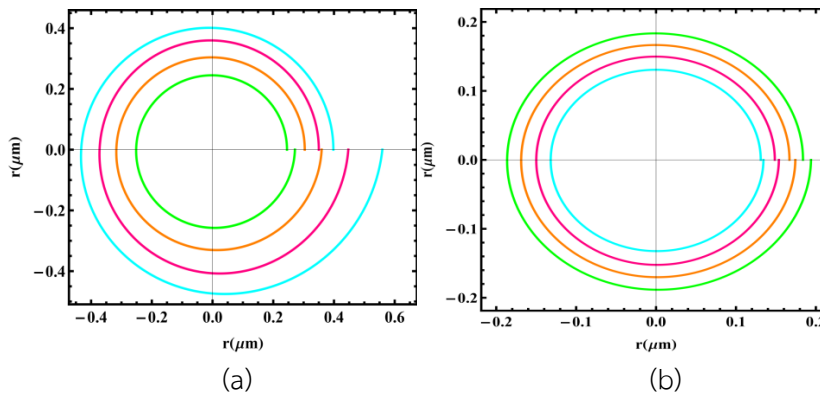
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

การทดลองหาระยะทางของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง $F(R)$



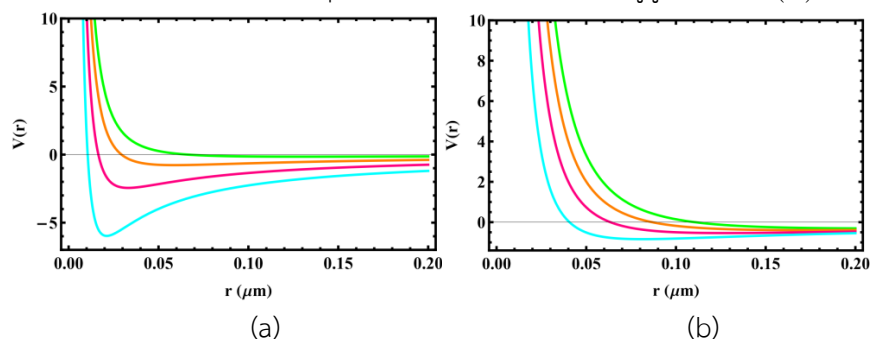
ภาพที่ 1 แสดงลักษณะของระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุในระบบพิกัดเชิงขั้ว (a) แสดงลักษณะของระยะทางของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของประจุเริ่มต้นเปลี่ยนจาก $\rho = 3 \mu C \rightarrow 4.5 \mu C$, ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของประจุ $\rho_1 = 3.0 \mu C$, เส้นกราฟสีน้ำตาลแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของประจุ $\rho_2 = 3.5 \mu C$, เส้นกราฟสีชมพูแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของประจุ $\rho_3 = 4.0 \mu C$ และ เส้นกราฟสีฟ้าอ่อนแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของประจุ $\rho_4 = 4.5 \mu C$ (b) แสดงลักษณะของระยะทางของอนุภาคประจุที่มีการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดเชิงขั้วในคู่อันดับ (r, θ) เมื่อตัวแปรมวลของอนุภาค m เพิ่มขึ้นเปลี่ยนจาก $m = 0.470 \rightarrow 0.485 kg$, ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของมวลอนุภาค $m_1 = 0.470 kg$, เส้นกราฟสีน้ำตาลแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของมวลอนุภาค $m_2 = 0.475 kg$, เส้นกราฟสีชมพูแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของ

มวลอนุภาค $m_3=0.480\text{ kg}$ และ เส้นกราฟสีฟ้าอ่อนแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของมวลอนุภาค $m_4=0.485\text{ kg}$

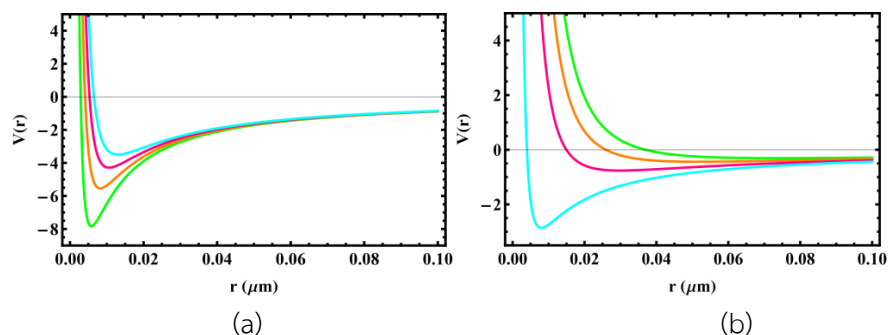


ภาพที่ 2 แสดงลักษณะของระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุ (a) แสดงลักษณะของกราฟระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุ เมื่อโมเมนตัมเชิงมุมเริ่มต้น l เปลี่ยนจาก $l = 0.552 \rightarrow 0.558$ ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของโมเมนตัมเชิงมุม $l_1=0.552$, เส้นกราฟสีน้ำตาลแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของโมเมนตัมเชิงมุม $l_2=0.554$, เส้นกราฟสีชมพูแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของโมเมนตัมเชิงมุม $l_3=0.556$ และเส้นกราฟสีฟ้าอ่อนแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของโมเมนตัมเชิงมุม $l_4=0.558$ (b) แสดงลักษณะของระยะทางของอนุภาคประจุ เมื่อตัวแปรทอร์กการหมุน γ เพิ่มขึ้นโดยเปลี่ยนค่าจาก $\gamma = 0.597 \rightarrow 0.600$ ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของทอร์กการหมุน $\gamma_1=0.597$, เส้นกราฟสีน้ำตาลแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของทอร์กการหมุน $\gamma_2=0.598$, เส้นกราฟสีชมพูแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของทอร์กการหมุน $\gamma_3=0.599$ และ เส้นกราฟสีฟ้าอ่อนแสดงระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อขนาดของทอร์กการหมุน $\gamma_4=0.600$

การทดลองหาค่าศักย์ยังผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง $F(R)$



ภาพที่ 3 แสดงลักษณะของกราฟศักย์ยังผลเทียบกับระยะทางของอนุภาคประจุในระบบพิกัดเชิงขั้ว (a) แสดงลักษณะของศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของประจุเริ่มต้นเปลี่ยนจาก $\rho = 3.0\mu C \rightarrow 7.5\mu C$ ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของประจุ $\rho_1 = 3.0\mu C$, เส้นกราฟสีน้ำตาลแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของประจุ $\rho_2 = 4.5\mu C$, เส้นกราฟสีชมพูแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของประจุ $\rho_3 = 6.0\mu C$ และ เส้นกราฟสีฟ้าอ่อนแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของประจุ $\rho_4 = 7.5\mu C$ (b) แสดงลักษณะของศักย์ยังผลของอนุภาคประจุเทียบกับระยะทางการเคลื่อนที่ เมื่อตัวแปรมวลของอนุภาค m มีค่าเปลี่ยนแปลงจาก $m = 0.480 \rightarrow 0.495 kg$ ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของมวลอนุภาค $m_1 = 0.480 kg$, เส้นกราฟสีน้ำตาลแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของมวลอนุภาค $m_2 = 0.485 kg$, เส้นกราฟสีชมพูแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของมวลอนุภาค $m_3 = 0.490 kg$ และ เส้นกราฟสีฟ้าอ่อนแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของมวลอนุภาค $m_4 = 0.495 kg$



ภาพที่ 4 แสดงลักษณะของศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ (a) แสดงลักษณะของกราฟศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อโมเมนต์เชิงมุม ℓ เปลี่ยนจาก $\ell = 0.5478 \rightarrow 0.5481$

ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของโมเมนต์เชิงมุม $\ell_1=0.5478$, เส้นกราฟสีน้ำตาลแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของโมเมนต์เชิงมุม $\ell_2=0.5479$, เส้นกราฟสีชมพูแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของโมเมนต์เชิงมุม $\ell_3=0.5480$ และ เส้นกราฟสีฟ้าอ่อนแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของโมเมนต์เชิงมุม $\ell_4=0.5481$ (b) แสดงลักษณะของศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อตัวแปรทอร์กการหมุน γ เพิ่มขึ้นโดยเปลี่ยนค่าจาก $\gamma = 0.602 \rightarrow 0.605$ ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของทอร์กการหมุน $\gamma_1=0.602$, เส้นกราฟสีน้ำตาลแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของทอร์กการหมุน $\gamma_2=0.603$, เส้นกราฟสีชมพูแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของทอร์กการหมุน $\gamma_3=0.604$ และ เส้นกราฟสีฟ้าอ่อนแสดงศักย์ยังผลของอนุภาคประจุ เมื่อขนาดของทอร์กการหมุน $\gamma_4=0.605$

สรุปผลการวิจัย

จากการทดลองคำนวณหาสมการระยะทางของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง $F(R)$ ระยะทางของอนุภาคที่เป็นประจุไฟฟ้าแปรผันตรงกับค่าตัวแปร ℓ , γ, m และประจุไฟฟ้า ρ การทดลองคำนวณหาศักย์ยังผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบพิกัดเชิงขั้วภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง $F(R)$ ศักย์ยังผลของอนุภาคที่เป็นประจุไฟฟ้าที่มีลักษณะเป็นศักย์คู่ซึ่งแปรผันตรงกับค่าตัวแปร γ, m , ℓ และประจุไฟฟ้า ρ โดยในการทดลองค่าระยะทางและศักย์ยังผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบพิกัดเชิงขั้วภายใต้แรงที่ขึ้นอยู่กับรัศมีของวงโคจร $F(R)$ อธิบายได้ว่าการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามสมการ $F(R)$ นั้นมีลักษณะการเคลื่อนที่คล้ายวงรี(Michael, 2018) เนื่องมาจากแรงรบกวนตามฟังก์ชัน $F(R)$ มีลักษณะการเคลื่อนที่คล้ายวงรีซึ่งมีความสอดคล้องกับกฎของเคปเลอร์ (Hideyuki and Hiroshi, 2010)

เมื่อพิจารณาเป็นรายกรณีพบว่า การทดลองคำนวณหาสมการระยะการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง $F(R)$ ภาพที่ 1 (a) ถ้าประจุไฟฟ้า (ρ) มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ระยะการเคลื่อนที่ของอนุภาคเคลื่อนที่แบบวงกลมมีระยะที่ลดน้อยลง โดยเป็นการเคลื่อนที่ที่ไม่สูญเสียพลังงาน $w=0$ (Edison et. al., 2013) ภาพที่ 1 (b) ถ้าค่าตัวแปร m มีค่าลดลง จะทำให้อนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่ในลักษณะคล้ายวงรีมีระยะที่เพิ่มขึ้น โดยเป็นการเคลื่อนที่ที่สูญเสียพลังงาน $w=0$ ภาพที่ 2 (a) ถ้าค่าตัวแปร (ℓ) มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้อนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่ในลักษณะคล้ายวงรีมีระยะที่เพิ่มขึ้น โดยเป็นการเคลื่อนที่ที่สูญเสียพลังงาน $w=0$ จะเห็นว่าเมื่อค่าตัวแปร ℓ มีค่าเพิ่มขึ้นจุดเริ่มกับจุดสุดท้ายห่างกันเพิ่มมากขึ้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่ามีการ

สูญเสียพลังงาน w มากขึ้นและภาพที่ 2(b) ถ้าค่าตัวแปร γ มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้อนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่ในลักษณะคล้ายวงรีมีระยะที่เพิ่มขึ้น โดยเป็นการเคลื่อนที่ที่สูญเสียพลังงาน $w=0$ จะเห็นว่าเมื่อค่าตัวแปร γ เพิ่มขึ้น จุดเริ่มกับจุดสุดท้ายห่างกันเพิ่มมากขึ้น ซึ่งแสดงว่ามีการสูญเสียพลังงาน w เพิ่มมากขึ้นในการทดลองคำนวณหาค่าศักย์ยังผลของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบพิกัดเชิงขั้วภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง $F(R)$ จากภาพที่ 3(a) ถ้าประจุไฟฟ้า ρ มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าศักย์ยังผลของอนุภาคแสดงศักย์ยังผลที่เป็นศักย์ดูดเพิ่มมากขึ้น จากภาพที่ 3(b) ถ้ามวล (m) มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าศักย์ยังผลของอนุภาคแสดงเป็นศักย์ยังผลที่เป็นศักย์ผลักลดลง จากภาพที่ 4(a) ถ้าค่าตัวแปร ℓ มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้อนุภาคประจุแสดงค่าศักย์ยังผลของอนุภาคแสดงศักย์ยังผลที่เป็นศักย์ดูดลดลงจนกลายเป็นศักย์ผลักและจากภาพที่ 4(b) ถ้าค่าตัวแปร γ มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าศักย์ยังผลของอนุภาคแสดงศักย์ยังผลที่เป็นศักย์ดูดเพิ่มมากขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- รัชนี้ รุจิโรดม, 2558, **กลศาสตร์ 1**, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, หน้า 159-203.
- วัชรพงษ์ พลสนามและ อาทิตย์ หู่เต็ม, การคำนวณหาระยะทางการเคลื่อนที่และหาค่าพลังงานการเคลื่อนที่ของวัตถุวงโคจรของอนุภาค, **วารสารวิทยาศาสตร์โลกดาราศาสตร์และอวกาศ**, ปีที่ 1 ฉบับที่ 1 (2561) หน้า 55-63.
- Atam P.A., 1990, **Introduction to classical mechanics**, prentice-Hall, pp. 220-268.
- Susan M.L., 2004, **Mathematics for physicists**, Thomson Brooks/cole, pp. 169-197.
- Roel S., 2001, **A guided tour of mathematical method**, Cambridge university press, pp. 33-48.
- Fung M.K, 2012, The kepler problem and the isotropic harmonics oscillator, **Chiness journal of physics**, 50(5), pp. 713-719.
- Hideyuki I. and Hiroshi N., 2010, Kepler's quartic curve is implemented by a central force, **International Mathematical Forum**, 5(3), pp. 139-144.

Edison A.E, Emmanuel E.E and John O.A, 2013, The Modified Theory of Central-Force Motion, **IOSR Journal of Applied Physics**, pp. 75-82.

Michael N., 2018, Newton's graphical method, **American Journal of Physics**, pp.764-771.