

Received: September 6, 2022

Revised: September 24, 2022

Accepted: October 10, 2022

Published: November 21, 2022

**การคำนวณหาความเร็ว และการกระจัดที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่
แบบโพรเจกไทล์ภายใต้แรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกขึ้นอยู่กับเวลาที่สั้นในแกน y**
**Calculation of velocity and displacement of body in the projectile motion
under drag force lift force and a time-dependent external force oscillation
vertical**

ปิยรัตน์ มุลศรี¹ ศศิกานต์ ปานปรานีเจริญ² และ อาทิตย์ หุ้เต็ม^{1*}
Piyarat Moonsri¹ Sasikarn Panpraneecharoen² and Artit Hutem^{1*}

¹ สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ จังหวัดเพชรบูรณ์

² สาขาวิชาเคมี คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ จังหวัดเพชรบูรณ์

*artithutem@pcru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์แบบออสซิลเลตที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในการกระจัดแนวระดับและการกระจัดแนวตั้ง ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้กฎนิวตันข้อที่สองในการคำนวณหาการกระจัดในแนวระดับ และแนวตั้งที่ขึ้นอยู่กับเวลา และคำนวณหาความเร็วในแนวระดับและแนวตั้งของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ภายใต้แรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอก และเปรียบเทียบกับกราฟการเพิ่มแรงภายนอกเข้าไปในแนวตั้ง จากนั้นนำผลที่ได้สร้างกราฟด้วยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ ซึ่งผลการวิจัยพบว่า กราฟความเร็วและกราฟการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีแรงภายนอกมากกว่ากราฟที่ไม่มีแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกมากกว่า

คำสำคัญ: ความเร็ว, การกระจัด, การเคลื่อนที่โพรเจกไทล์, แรงภายนอกที่ขึ้นกับเวลา

Abstract

The purpose of this research was to investigate the horizontal and vertical displacements of an oscillating particle as a function of time in the projectile motion. We can apply Newton's second law of motion to evaluate the time-dependent of the particle's displacements along both horizontal and vertical directions. The time-dependent horizontal and vertical displacement and velocity of the particle were then calculated with the presence of air resistance, lifting force, and external force. The presence of external vertical force was also compared. The obtained data were created and presented in graphs using a computer program. The results show that the vertical velocity and displacement increase with the presence of external forces.

Keywords: velocity, displacement, projectile motion, time-dependent external force

บทนำ

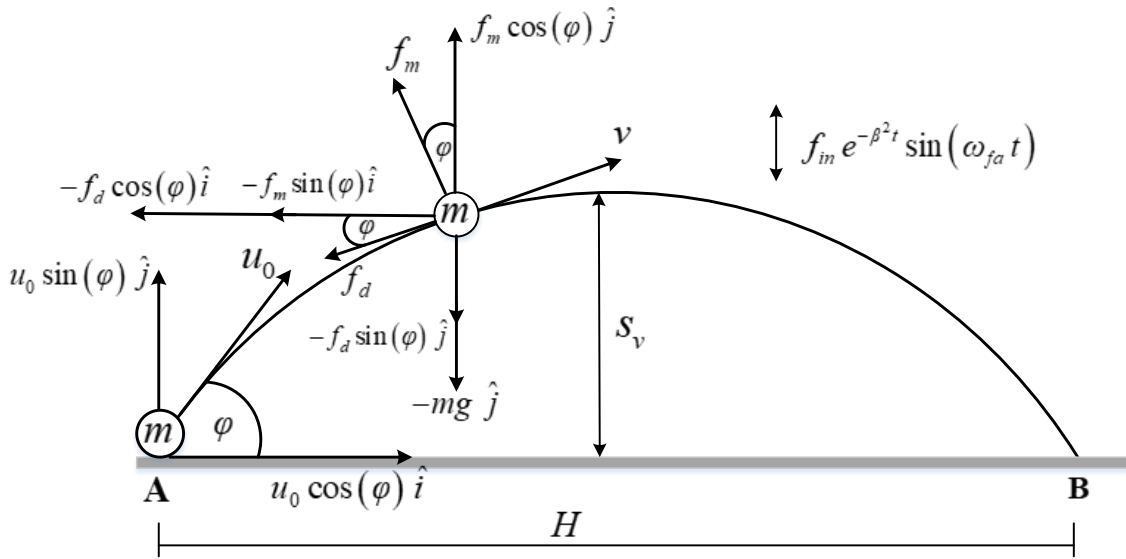
การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (projectile motion) เป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุใดๆ ที่เคลื่อนที่ลอยอยู่ในอากาศภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงยกโดยมีลักษณะการเคลื่อนที่แบบวิถีเส้นโค้ง ในการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ 2 มิติ นั้นสามารถพิจารณาการเคลื่อนที่ได้ 2 แกน แกนในแนวระดับ (แกน x) และแกนในแนวตั้ง (แกน y) (Hutem, A. and Kerdmee, S., 2013) วัตถุใดๆ ที่เคลื่อนที่ในอากาศนั้นจะมีแรงยกและแรงต้านทานอากาศเข้ามาเกี่ยวข้องในความเป็นจริงการออกกำลังกายการตีเบตนิตันในสวนสาธารณะนั้น บางครั้งมีแรงลมมาด้วย ต่อมาในงานวิจัยการคำนวณการกระจัดในเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของวัตถุ ในแนวระดับ ภายใต้แรงต้านอากาศและแรงภายนอก และแนวตั้ง ภายใต้แรงต้านอากาศและแรงภายนอก ซึ่งในงานวิจัยของ Kuaykaew S. และคณะ (2016) ได้ทำการแก้สมการด้วยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์ ที่คิดเพียงแรงภายนอกในแนวตั้ง เท่านั้น จะได้การกระจัดในแนวระดับ ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และการกระจัดในแนวตั้ง ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา (Kuaykaew, S. et.al., 2016) ต่อมาในงานวิจัยของ Dharma (2019) ได้คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุแบบโพรเจกไทล์ภายใต้แรงต้านอากาศ และแสดงกราฟของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ในแกนแนวระดับ และแนวตั้ง และแสดงความเร็วของวัตถุเป็นฟังก์ชันของเวลาในแกนแนวระดับ และแนวตั้ง ด้วยซึ่งในงานวิจัยนี้ไม่ได้คิดแรงยก และแรงภายนอกที่ขึ้นอยู่กับเวลาแบบการสั่น (Dharma, R. P., 2019) ต่อมาในงานวิจัยของ Changkham J. และคณะ (2022) ได้คำนวณหาความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และการจัดการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนแบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงต้านอากาศ แรงยกและแรงภายนอกในแกน y ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา แต่โดยที่แรงภายนอกในแกน y ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาดังกล่าวนี้เป็นฟังก์ชัน Cosine และมีการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์แรงยกตามการเคลื่อนที่ของลูกฟุตบอล และเบสบอล

ดังนั้น งานวิจัยนี้ ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และการจัดการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนแบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงต้านอากาศ แรงยกและแรงภายนอกในแกน y ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาและเป็นฟังก์ชัน Sine และมีการห้วงของวัตถุอันเนื่องมาจากโมเลกุลอากาศที่ขึ้นอยู่กับความหนาแน่นอากาศ โดยการสร้างแบบจำลองทางฟิสิกส์ขึ้นมาโดยใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันและวิธีโดยวิธีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมาแก้ไขระบบสมการ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อคำนวณหาความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และการจัดการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงยก เมื่อมีแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็นฟังก์ชัน Sine มากระทำในแนวตั้ง ซึ่งเทียบเคียงกับการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ในกรณีที่มีแรงโน้มถ่วง (Changkham J. et.al., 2022)

วิธีดำเนินการวิจัย



รูปที่ 1 วิธีเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้แรงต่างๆ ในการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

จากรูปที่ 1 ในงานวิจัยนี้สามารถคำนวณหาการกระจัดของวัตถุที่มีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบโพรเจกไทล์ด้วยความเร็ว ที่มีวิธีการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งภายใต้แรงภายนอก แรงต้านอากาศ (f_d) และแรงยก (f_m) (Jeffrey, L. L. et.al., 2014) สามารถนำ กฎข้อที่สองของนิวตันมาช่วยแก้ไขสมการเคลื่อนที่เพื่อหาการกระจัดในแนวระดับของวัตถุมวล m นำผลรวมของแรงที่กระทำต่อวัตถุ แทนในกฎข้อที่สองของนิวตัน (Ebaid, A. et.al., 2019) ดังนี้

$$m \left(\frac{dv_H}{dt} \hat{i} + \frac{dv_v}{dt} \hat{j} \right) = -f_d \cos(\varphi) \hat{i} - f_m \sin(\varphi) \hat{i} + f_m \cos(\varphi) \hat{j} - f_d \sin(\varphi) \hat{j} - mg \hat{j} + f_{in} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t) \hat{j} \quad (1)$$

จากสมการที่ (1) v_H คือความเร็วในแนวระดับของวัตถุมวล m ที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ซึ่งมีหน่วยเป็น m/s , v_v คือความเร็วในแนวดิ่งของวัตถุมวล m ที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ซึ่งมีหน่วยเป็น m/s และ ω_{fa} คือความถี่ของการสั่นโมเลกุลอากาศ ของแรงภายนอกแรงพายุที่มีความปั่นป่วน $\omega_{fa} = 2\pi f$ ซึ่งมีหน่วยเป็น rad/s และ f_{in} คือแรงเริ่มต้นของแรงภายนอกแบบพายุ ซึ่งมีหน่วยเป็น นิวตัน ต่อไป คำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m ในแนวระดับตามเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$ จะได้

$$m \frac{dv_H}{dt} = -f_d \cos(\varphi) - f_m \sin(\varphi) \quad (2)$$

เรากำหนดให้ $f_d = \rho_d v_H$ โดยที่ ρ_d คือค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และ $f_m = \rho_m v_H$ โดยที่ ρ_m คือค่าสัมประสิทธิ์แรงยกจากสมการที่ (2) สามารถจัดรูปสมการได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1 ได้ดังนี้

$$\frac{dv_H}{dt} + \left\{ \frac{\rho_d}{m} \cos(\varphi) + \frac{\rho_m}{m} \sin(\varphi) \right\} v_H = 0 \quad (3)$$

จากสมการที่ (3) เรากำหนดให้ตัวแปร $\tau = \frac{\rho_d}{m} \cos(\varphi) + \frac{\rho_m}{m} \sin(\varphi)$ แทนลงในสมการที่ (3) และทำการอินทิเกรต แล้วใส่เงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ $v_H(0) = u_0 \cos(\varphi)$ เราจะได้ ความเร็วในแนวระดับของวัตถุมวล m ที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนี้

$$v_H(t) = u_0 \cos(\varphi) e^{-\tau t} \quad (4)$$

ต่อไปเราคำนวณหาการกระจัดในแนวระดับของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจากนิยาม $v_H = dH/dt$ โดยที่ H คือการกระจัดในแนวระดับของวัตถุมวล m เราใช้การอินทิเกรตและเงื่อนไขเริ่มต้น $H(0) = H_0$ ดังนี้

$$\begin{aligned} v_H(t) &= dH/dt = u_0 \cos(\varphi) e^{-\tau t} \\ H(t) &= \frac{u_0}{\tau} \cos(\varphi) (1 - e^{-\tau t}) + H_0 \end{aligned} \quad (5)$$

จากสมการที่ (5) คือการกระจัดในแนวระดับของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลาขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์แรงยก จากสมการที่ (4) และสมการที่ (5) สามารถแสดงกราฟของความเร็วในแนวระดับ และกราฟการกระจัดในแนวระดับเทียบกับเวลาได้ ดังรูปที่ 2 (a) และ(b) ตามลำดับ จากสมการที่ (5) เราสามารถคำนวณหาเวลาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวระดับได้ดังนี้

$$t(H) = -\frac{1}{\tau} \ln \left(1 - \frac{\tau(H - H_0)}{u_0 \cos(\varphi)} \right) \quad (6)$$

ต่อไป คำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m ในแนวตั้งตามเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{j}$ จะได้

$$m \frac{dv_v}{dt} = f_m \cos(\varphi) - f_d \sin(\varphi) - mg + f_{in} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t) \quad (7)$$

เรากำหนดให้ $f_d = \rho_d v_H$ โดยที่ ρ_d คือค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และ $f_m = \rho_m v_H$ โดยที่ ρ_m คือค่าสัมประสิทธิ์แรงยกจากสมการที่ (7) สามารถจัดรูปสมการได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1 แบบไม่เอกพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dv_v}{dt} + \left\{ \frac{\rho_d}{m} \sin(\varphi) - \frac{\rho_m}{m} \cos(\varphi) \right\} v_v = -g + \frac{f_{in}}{m} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t) \quad (8)$$

จากสมการที่ (8) เรากำหนดตัวแปร $\delta = \frac{\rho_d}{m} \sin(\varphi) - \frac{\rho_m}{m} \cos(\varphi)$

$$\frac{dv_v}{dt} + \delta v_v = -g + \frac{f_{in}}{m} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t) \quad (9)$$

จากสมการที่ (9) จะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1 แบบไม่เอกพันธ์ ต่อไปเราจะหาผลเฉลยของสมการที่ (9) โดยใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน และใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $v_v(0) = u_0 \sin(\varphi)$ ได้ความเร็วในแนวตั้งของวัตถุมวล m ที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนี้

$$\begin{aligned} v_v(t) &= -\frac{g}{\delta} + \frac{f_{in}}{m} \left\{ \frac{e^{-\beta^2 t} \left((\delta - \beta^2) \sin(\omega_{fa} t) - \omega_{fa} \cos(\omega_{fa} t) \right)}{(\delta - \beta^2)^2 + \omega_{fa}^2} \right\} + \left(u_0 \sin(\varphi) + \frac{g}{\delta} \right) e^{-\delta t} \\ &\quad + \frac{f_{in} \omega_{fa} e^{-\delta t}}{m \left((\delta - \beta^2)^2 + \omega_{fa}^2 \right)} \end{aligned} \quad (10)$$

จากสมการที่ (10) เราจะทำการวิเคราะห์ลักษณะวิถีการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยการพล็อตกราฟความเร็วในแนวตั้งของวัตถุมวล m ที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เทียบกับเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์แรง

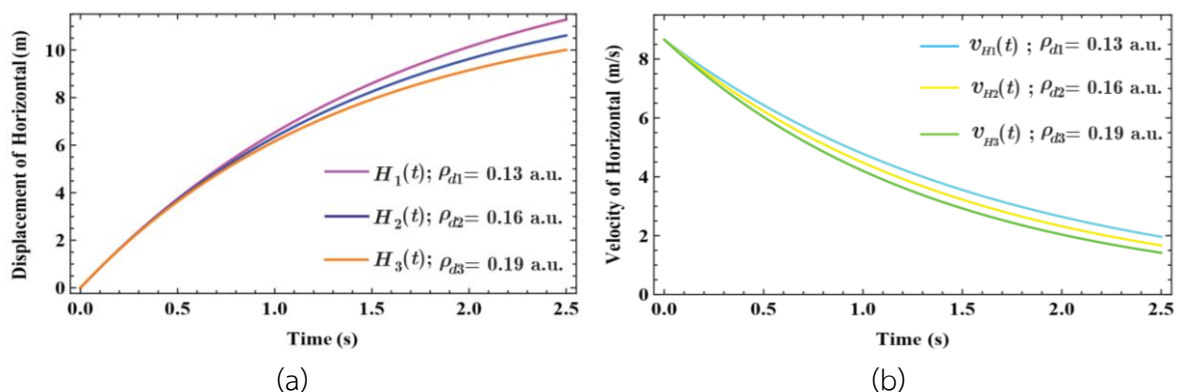
ด้านอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์แรงยกจะอธิบายอยู่ในส่วนของหัวข้อผลการวิจัยและอภิปรายผล จากสมการที่ (10) เราจะคำนวณหาการกระจัดในแนวตั้งของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลา (s_v) ซึ่ง s_v จะขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์แรงยกจากนิยาม $v_v(t) = ds_v/dt$ โดยใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนเพื่อคำนวณหาการกระจัดในแนวตั้งของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $s_v(0) = s_{v0}$ จะได้การกระจัดในแนวตั้งของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลาดังนี้

$$s_v(t) = \frac{f_{in} \omega_{fa}}{m((\delta - \beta^2))} \left\{ \frac{e^{-\beta^2 t} (\beta^2 \cos(\omega_{fa} t) - \omega_{fa} \sin(\omega_{fa} t))}{\beta^4 + \omega_{fa}^2} \right\} - \frac{g}{\delta} t + s_{v0} - \frac{f_{in} \omega_{fa} \beta^2}{m((\delta - \beta^2)^2 + \omega_{fa}^2)(\beta^4 + \omega_{fa}^2)} \\ - \frac{f_{in}(\delta - \beta^2)}{m((\delta - \beta^2)^2 + \omega_{fa}^2)} \left\{ \frac{e^{-\beta^2 t} (\beta^2 \sin(\omega_{fa} t) + \omega_{fa} \cos(\omega_{fa} t))}{\beta^4 + \omega_{fa}^2} \right\} - \left(\frac{u_0 \sin(\phi)}{\delta} + \frac{g}{\delta^2} + \frac{f_{in} \omega_{fa}}{m\delta((\delta - \beta^2)^2 + \omega_{fa}^2)} \right) e^{-\delta t} \\ + \left(\frac{u_0 \sin(\phi)}{\delta} + \frac{g}{\delta^2} + \frac{f_{in} \omega_{fa}}{m\delta((\delta - \beta^2)^2 + \omega_{fa}^2)} \right) + \frac{f_{in} \omega_{fa}(\delta - \beta^2)}{m((\delta - \beta^2)^2 + \omega_{fa}^2)(\beta^4 + \omega_{fa}^2)} \quad (11)$$

จากสมการที่ (11) เรานำสมการที่ (6) แทนลงในสมการที่ (11) จะได้กราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดในแนวระดับของการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

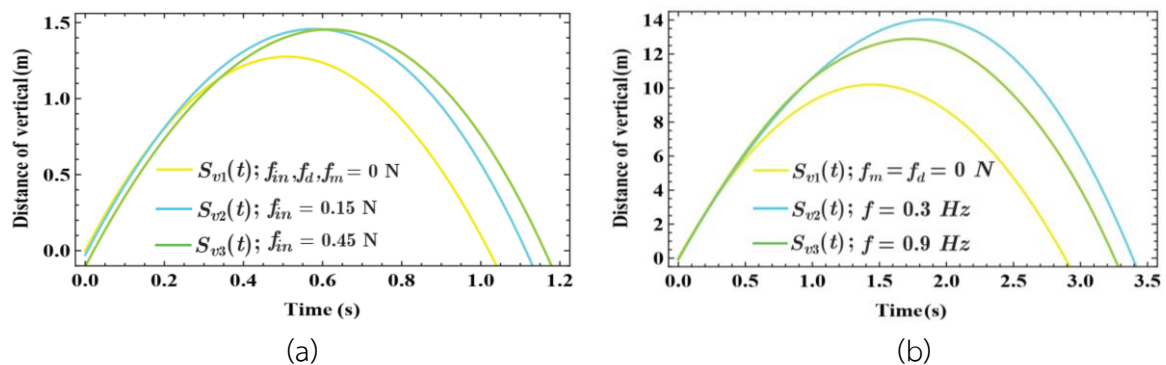
จากการคำนวณหาความเร็วในแนวระดับ และการกระจัดในแนวระดับที่เป็นฟังก์ชันของเวลาตามสมการที่ (4) และสมการที่ (5) สามารถแสดงกราฟได้ ดังรูปที่ 2 (a) และ (b) และจากการคำนวณหาความเร็วในแนวตั้ง และการกระจัดในแนวตั้งของวัตถุเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาตามสมการที่ (10) และสมการที่ (11) สามารถแสดงกราฟได้ ดังรูปที่ 3 (a) และ (b) และดังรูปที่ 4 (a) และ (b) และดังรูปที่ 5 (a) และ (b)



รูปที่ 2 (a) แสดงกราฟของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวระดับ (b) แสดงกราฟของความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวระดับ

จากรูปที่ 2 (a) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวระดับเทียบกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของวัตถุมวล m โดยมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ

ρ_d เส้นกราฟสีชมพูแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวระดับเทียบกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของวัตถุมวล m เมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ $\rho_d = 0.13 \text{ a.u.}$ ต่อไปเส้นกราฟสีน้ำเงินแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวระดับเทียบกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของวัตถุมวล m เมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ $\rho_d = 0.16 \text{ a.u.}$ เส้นกราฟสีน้ำตาลแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวระดับเทียบกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของวัตถุมวล m เมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ $\rho_d = 0.19 \text{ a.u.}$ ถ้าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ ρ_d มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้การกระจัดในแนวระดับเทียบกับเวลามีค่าลดลงเพราะค่า ρ_d คือความหนาแน่นของมวลอากาศที่เคลื่อนในอากาศจะทำให้การเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ได้การกระจัดในแนวระดับสั้นลงแต่การกระจัดในแนวระดับของการเคลื่อนที่วัตถุมวล m ไม่มีการสั้นลงเนื่องจากแรงภายนอก จากรูปที่ 2 (b) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวระดับเทียบกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของวัตถุมวล m โดยมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ ρ_d เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวระดับเทียบกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของวัตถุมวล m เมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ $\rho_d = 0.13 \text{ a.u.}$ ต่อไปเส้นกราฟสีเหลืองแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวระดับเทียบกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของวัตถุมวล m เมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ $\rho_d = 0.16 \text{ a.u.}$ เส้นกราฟสีเขียวอ่อนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวระดับเทียบกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของวัตถุมวล m เมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ $\rho_d = 0.19 \text{ a.u.}$ ถ้าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ ρ_d มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร็วในแนวระดับเทียบกับเวลามีค่าลดลงเพราะค่า ρ_d คือความหนาแน่นของมวลอากาศที่เคลื่อนในอากาศจะทำให้การเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ได้ความเร็วในแนวระดับสั้นลง

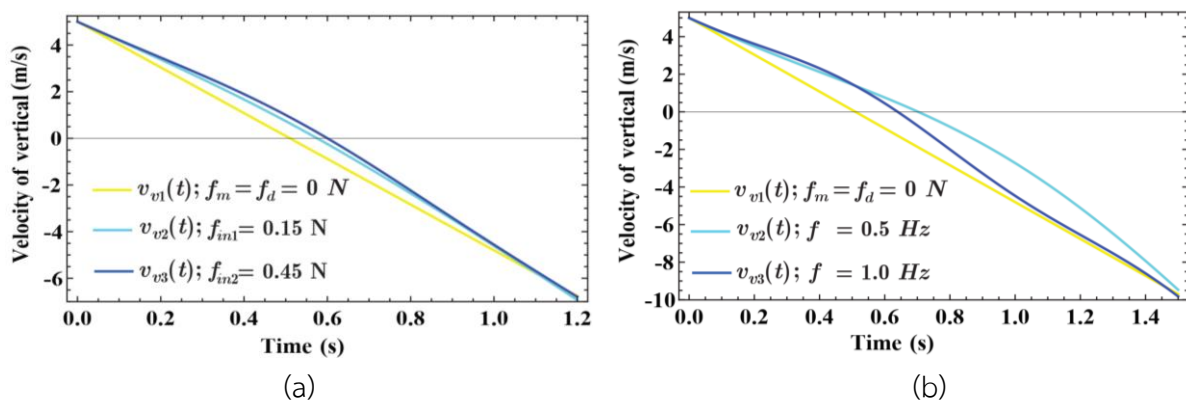


รูปที่ 3 (a) แสดงกราฟของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งเมื่อแรงภายนอกเริ่มต้นเปลี่ยนแปลงจาก $f_{in} = 0.15 \rightarrow 0.45 \text{ N}$. (b) แสดงกราฟของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งเมื่อความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.3 \rightarrow 0.9 \text{ Hz}$

จากรูปที่ 3 (a) เป็นกราฟของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อแรงภายนอกเริ่มต้นเปลี่ยนแปลงจาก $f_{in} = 0.15 \rightarrow 0.45 \text{ N}$. เส้นกราฟสีเหลืองคือการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งที่ไม่ได้คิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกในกรณีที่มีแรงโน้มถ่วง เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลเป็นการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อแรงภายนอกเริ่มต้นเป็น $f_{in} = 0.15 \text{ N}$ และขึ้นอยู่กับแรงต้านอากาศ แรงยก ต่อมาเส้นกราฟสีเขียวอ่อนเป็นการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อแรงภายนอกเริ่มต้นเป็น $f_{in} = 0.45 \text{ N}$ และขึ้นอยู่กับแรงต้านอากาศ แรงยก เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเล และสีเขียวอ่อนของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาใน

แนวตั้งของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ภายใต้แรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกจะมีค่าของการกระจัดมากกว่าเส้นกราฟสี่เหลี่ยมของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งที่ไม่ได้คิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกในกรณีที่มีแรงโน้มถ่วง เพราะเส้นกราฟสี่ฟ้าน้ำทะเล และสี่เหลี่ยมของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาขึ้นอยู่กับแรงภายนอก $f_{in} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t)$ ถ้าค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเพิ่มขึ้นจะทำให้การกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาของวัตถุมวล m ใช้เวลาการเดินทางมากขึ้นเพราะเกิดการเปลี่ยนเฟสของการเริ่มเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

จากรูปที่ 3 (b) เป็นกราฟของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อความถี่เปลี่ยนแปลงเปลี่ยนจาก $f = 0.3 \rightarrow 0.9 \text{ Hz}$. เส้นกราฟสี่เหลี่ยมคือการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งที่ไม่ได้คิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกในกรณีที่มีแรงโน้มถ่วง เส้นกราฟสี่ฟ้าน้ำทะเลเป็นการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อความถี่เป็น $f = 0.3 \text{ Hz}$ และขึ้นอยู่กับแรงต้านอากาศ แรงยก ต่อมาเส้นกราฟสี่เหลี่ยมเป็นการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อความถี่เป็น $f = 0.9 \text{ Hz}$ และขึ้นอยู่กับแรงต้านอากาศ แรงยก เส้นกราฟสี่ฟ้าน้ำทะเล และสี่เหลี่ยมของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ภายใต้แรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกจะมีค่าของการกระจัดมากกว่าเส้นกราฟสี่เหลี่ยมของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งที่ไม่ได้คิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกในกรณีที่มีแรงโน้มถ่วง เพราะเส้นกราฟสี่ฟ้าน้ำทะเล และสี่เหลี่ยมของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาขึ้นอยู่กับแรงภายนอก $f_{in} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t)$ ถ้าค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเพิ่มขึ้นจะทำให้การกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาของวัตถุมวล m ใช้เวลาการเดินทางมากขึ้น และค่าของการกระจัดมีค่ามากขึ้นด้วยเพราะเกิดการเปลี่ยนเฟสของการเริ่มเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

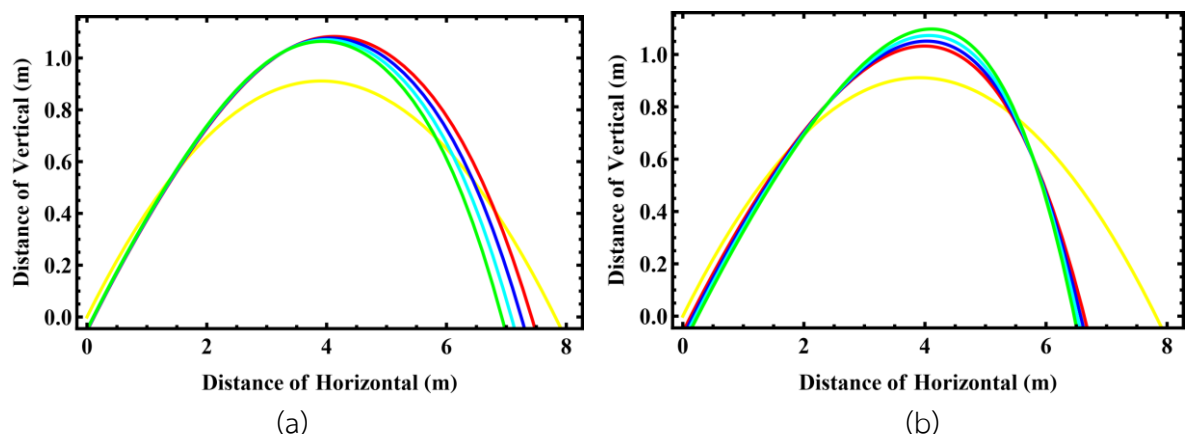


รูปที่ 4 (a) แสดงกราฟของความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งเมื่อแรงภายนอกเริ่มต้นเปลี่ยนแปลงจาก $f_{in} = 0.15 \rightarrow 0.45 \text{ N}$. (b) แสดงกราฟของความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งเมื่อความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.3 \rightarrow 0.9 \text{ Hz}$

จากรูปที่ 4 (a) แสดงกราฟของความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวตั้งเมื่อแรงภายนอกเริ่มต้นเปลี่ยนแปลงค่าจาก $f_{in} = 0.15 \text{ N}$ ไปเป็น $f_{in} = 0.45 \text{ N}$ เส้นกราฟสี่เหลี่ยมแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวตั้งกับเวลาที่ไม่ได้คิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกอยู่ในกรณีที่มีแรงโน้มถ่วงอย่างเดียวต่อไป เส้นกราฟสี่ฟ้าน้ำทะเลแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวตั้งกับเวลาที่มีการคิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอก $f_{in} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t)$ โดยมีค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเป็น $f_{in} = 0.15 \text{ N}$ ต่อมา

เส้นกราฟสีน้ำเงินแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวดิ่งกับเวลาที่มีการคิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอก $f_{in} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t)$ โดยมีค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเป็น $f_{in} = 0.45 \text{ N}$ ถ้าค่าของแรงภายนอกมีค่าเพิ่มขึ้นจาก $f_{in} = 0.15 \text{ N}$ ไปเป็น $f_{in} = 0.45 \text{ N}$ ส่งผลให้ความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งใช้เวลาการเดินทางมากขึ้นเพราะเป็นผลมาจากค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ และแรงยก และเส้นกราฟของสีฟ้า น้ำทะเล และเส้นสีเหลืองมีลักษณะเส้นโค้งเมื่อเทียบกับความเร็วในแนวดิ่งเส้นสีน้ำเงิน

จากรูปที่ 4 (b) แสดงกราฟของความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งเมื่อความถี่เปลี่ยนแปลงค่าจาก $f = 0.5 \text{ Hz}$ ไปเป็น $f = 1 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีเหลืองแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวดิ่งกับเวลาที่ไม่ได้คิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกอยู่ในกรณีที่ไม่มีแรงโน้มถ่วงอย่างต่อเนื่องต่อไป เส้นกราฟสีฟ้า น้ำทะเล แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวดิ่งกับเวลาที่มีการคิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอก $f_{in} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t)$ โดยมีค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเป็น $f = 0.5 \text{ Hz}$ ต่อมาเส้นกราฟสีน้ำเงินแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวดิ่งกับเวลาที่มีการคิดแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอก $f_{in} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t)$ โดยมีค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเป็น $f = 1 \text{ Hz}$ ถ้าค่าของความถี่มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $f = 0.5 \text{ Hz}$ ไปเป็น $f = 1 \text{ Hz}$ ส่งผลให้ความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งใช้เวลาการเดินทางมากขึ้นเพราะเป็นผลมาจากค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ และแรงยก และเส้นกราฟของสีฟ้า น้ำทะเล และเส้นสีเหลืองมีลักษณะเส้นโค้งและเกิดการสั่นเมื่อเทียบกับความเร็วในแนวดิ่งเส้นกราฟสีน้ำเงิน



รูปที่ 5 (a) แสดงกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดในแนวระดับเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศเปลี่ยนแปลงจาก $\rho_d = 0.03 \rightarrow 0.09 \text{ a.u.}$ (b) แสดงกราฟของแสดงกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดในแนวระดับเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงยกเปลี่ยนแปลงจาก $\rho_m = 0.20 \rightarrow 0.32 \text{ a.u.}$

จากรูปที่ 5 (a) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดในแนวระดับเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศเปลี่ยนแปลงจาก $\rho_d = 0.03 \rightarrow 0.09 \text{ a.u.}$ เส้นกราฟสีเหลืองคือการกระจัดของการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดในแนวระดับปราศจาก แรงต้านอากาศ แรงยก แรงภายนอกอยู่ในกรณีที่ไม่มีแรงโน้มถ่วงอย่างต่อเนื่อง ต่อมาเส้นกราฟสีแดงคือการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดในแนวระดับเมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศเป็น $\rho_d = 0.03$ ต่อมาเส้นกราฟสีน้ำเงินคือการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดในแนวระดับเมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศเป็น $\rho_d = 0.05$ ต่อมาเส้นกราฟสีฟ้า น้ำทะเลคือการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดในแนวระดับเมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศเป็น $\rho_d = 0.07$ ต่อมาเส้นกราฟสีเขียวอ่อนคือการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดใน

แนวระดับเมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศเป็น $\rho_d=0.09$ ถ้าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศเพิ่มขึ้นการกระจัดในแนวระดับมีค่าลดลงจากเส้นกราฟสีแดงไปยังเส้นสีเขียวอ่อน และค่าการกระจัดในแนวดิ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟการกระจัดสีเหลืองที่ไม่มีแรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอก $f_{in} e^{-\beta^2 t} \sin(\omega_{fa} t)$

สรุปผลการวิจัย

การกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวระดับของการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ของวัตถุมวล m จะขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์แรงยก ซึ่งวิธีการเคลื่อนที่เป็นลักษณะฟังก์ชันเพิ่มต่อความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวระดับจะขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์แรงยก เมื่อเวลาในการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวระดับมีค่าลดลง ต่อมาการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่งขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์แรงยก และความถี่ของการสั่นโมเลกุลอากาศ และค่าแรงภายนอกเริ่มต้นแปรผันตรงกัน ความเร็วที่เป็นฟังก์ชันเวลาในแนวดิ่ง และการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันการกระจัดในแนวระดับ ซึ่งในงานวิจัยดังกล่าวผู้แต่งจะนำไปพิมพ์เป็นหนังสือในรายวิชาการศาสตร์ทั่วไปในระดับปริญญาโท ของสาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา และมีการนำงานวิจัยดังกล่าว ใช้ภาษาไพธอนในการแสดงวิธีการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกควบคุมโดยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแบบสามมิติต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- Changkham J., Moonsri P. and Hutem A., (2022). Modelling the projectile motion under a time – dependent external force, *VRUResearch and Development Journal Science and Technology*, 17(2), 45-59.
- Dharma R. P. (2019). Projectile motion using Mathematica. *International Science Community Association*, 7(3), 7-11.
- Ebaid A., El-Zahar E. R., Aljohani A. F., Salah, B., Krid, M. and Machado, J. T. (2019). Analysis of the two-dimensional fractional projectile motion in view of the experimental data. *Nonlinear Dynamics*, 97, 1711-1720.
- Jeffrey L. L., Donna M. G. C. and Karim R. (2014). Modelling the flight characteristics of a soccer ball. *American Journal of Physics Education*, 8, 4505-1-9.
- Hutem A. and Kerdmee S.. (2013). Physics Learning Achievement Study: Projectile, using Mathematica program of Faculty of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University Students. *European J of Physics Education*, 4, 22-33.
- Kantrowitz R. and Neumann M. M. (2016). Optimization of Projectile Motion Under Air Resistance Quadratic in Speed. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(1).

- Kuaykaew S., Kerdmee S., Banyenugam P., Moonsri P. and Hutem A. (2016). The Analytical Description of Projectile Motion of Cricket Ball in a Linear Resisting Medium the Storm Force. *Applied Mechanics and Materials*, 855, 188-191.
- Mustafa T. and Tugce A. (2020). Exact and approximate solutions to projectile motion in air incorporating Magnus effect. *The European Physical Journal Plus*, 566.
- Pouya, J. L., Patrick K., MohammadHady M. and William W. (2014). Computational aerodynamics of baseball, soccer ball and Volleyball. *American Journal of Sports Science*, 115-121.