Received: September 30, 2023 Revised: November 20, 2023
Accepted: December 13, 2023 Published: December 26, 2023

การคำนวณหาความเร็วเชิงมุม การกระจัดเชิงมุม และแรงตึงเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาสำหรับอนุภาคเคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกาภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงภายนอกโคไซน์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

Calculation of Time-dependent Angular Displacement Angular Velocity and Tension Force of Particle in the Pendulum Motion under Air Resistance Force and Cosine External Force

เอมอร วันเอก[1] และ อาทิตย์ หู้เต็ม[2*]
Aimon Wanaek [1] and Artit Hutem [2*]

[1] สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์
[2] สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์
[1] Program of Physics Faculty of Science and Technology, Uttaradit Rajabhat University
[2] Program of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University
*artithutem@pcru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการกระจัดเชิงมุม และความเร็วเชิงมุม และแรงตึงเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกตุ้มมวล m ซึ่งกำลังเคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกา ภายใต้แรงภายนอกโคไซน์ $f_0 \cos(\omega_f t)$ แรงต้านทานอากาศ $\vec{f}_d = -k_d \vec{v}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน และใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนในการคำนวณการกระจัดเชิงมุม ผลงานวิจัยการกระจัดเชิงมุมแปรผันโดยตรงกับค่าของแรงเริ่มต้นแรงภายนอก f_0 และค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบ θ_0 ผลงานวิจัยการกระจัดเชิงมุมแปรผกผันกับค่าความยาวเส้นเชือก ℓ และค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ k_d

คำสำคัญ: การกระจัดเชิงมุม, ความเร็วเชิงมุม, แรงตึงเส้นเชือก, แรงภายนอกโคไซน์

Abstract

This research aimed to study for time-dependent angular displacement angular velocity and tension force of particle in the pendulum motion under the cosine external force $f_0 \cos(\omega_f t)$ and air resistance force $\vec{f}_d = -k_d \vec{v}$ by use Newton's second law in polar coordinate. The angular displacement angular velocity and tension force can be evaluated by integration by parts. Then, the results were applied to create a graph with a computer program. The results show that the angular displacement is directly proportional to cosine external initial-force f_0 and initial-amplitude of oscillation θ_0. The results show that the angular displacement is inversely proportional to length ℓ and air resistance coefficient k_d.

Keywords: angular displacement, angular velocity, tension force, cosine external force

บทนำ

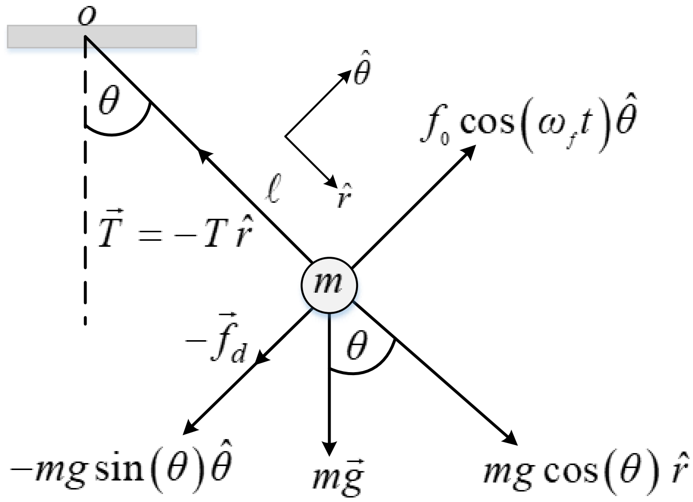
รายวิชากลศาสตร์คลาสสิก 1 ในหัวข้อการเคลื่อนที่แบบสั่นมีเนื้อหาเกี่ยวการเคลื่อนลูกตุ้มนาฬิกามวล m เคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกาแบบซิมเปิลเพนดูลัม (simple pendulum) ซึ่งมีการคำนวณเพื่อหาการกระจัดเชิงมุมของลูกตุ้มมวล m ที่เคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกา ซึ่งในระบบนี้พิจารณาพิกัดเชิงขั้ว แต่ไม่คิดแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $f_0 \cos(\omega_f t)$ ที่มากระทำต่อลูกตุ้มมวล m และไม่ได้คิดแรงต้านทานอากาศ $\vec{f}_d = -k_d \vec{v}$ ที่เป็นฟังก์ชันความเร็ว โดยได้การกระจัดเชิงมุมไซน์ที่ขึ้นอยู่กับเวลา และความถี่เชิงมุม และเฟสเริ่มต้น ในบทการเคลื่อนที่แบบสั่นมีการสั่นแบบมีแรงภายนอกกระทำต่ออนุภาคมวล m แต่ในหัวข้อเคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกาไม่มีการคำนวณเกี่ยวกับแรงภายนอก และคำนวณหาแรงตึงเส้นเชือกของระบบซิมเปิลเพนดูลัม ส่วนรายวิชาปฏิบัติการฟิสิกส์ 1 มีปฏิบัติการทดลองเรื่องการเคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกาแบบซิมเปิลเพนดูลัม ด้วยซึ่งในปฏิบัติการทดลองนั้นได้มีการแกว่งลูกตุ้มนาฬิกานั้นเกิดการปะทะกันระหว่างมวลของลูกตุ้มกับมวลโมเลกุลของอากาศ ซึ่งอิทธิพลของแรงต้านทานอากาศส่งผลให้การกระจัดเชิงมุม และความเร็วเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรเปลี่ยน และในงานวิจัยนี้ได้มีการเพิ่มแรงภายอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาไปกระทำต่อลูกตุ้มมวล m งานวิจัย Kharkongor และคณะได้แสดงวิธีการคำนวณการสั่นเรโซแนนซ์แบบแดมพ์ของลูกตุ้มเพนดูลัมภายใต้แรงภายนอกเป็นฟังก์ชันของเวลาเป็นฟังก์ชันโคไซน์มีการแสดงลักษณะของการกระจัดเชิงมุมที่เป็นสั่นแบบโคไซน์ ต่อมาในงานวิจัย Rafał K. แสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการคำนวณหาการกระจัดเชิงมุมของแดมพ์ของลูกตุ้ม 2 ลูก เพนดูลัม ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้ความยาวเส้นเชือก 1 เมตรได้แสดงค่าการกระจัดเชิงมุมที่เปรียบเทียบกับเวลา ดังนั้นงานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองทางฟิสิกส์ และคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มมวล m เคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกาโดยมีแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $f_0 \cos(\omega_f t)$ มากระทำต้องลูกตุ้มมวล m เพื่อดูลักษณะการสั่นของลูกตุ้มนาฬิกา และมีการกำหนดขนาดของค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศอีกด้วย และมีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณหาการกระจัดเชิงมุม และความเร็วเชิงมุม และแรงตึงเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาการเคลื่อนที่ลูกตุ้มมวล m ที่เคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกา

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

งานวิจัยชิ้นนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณหาการกระจัดเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม และแรงตึงเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกตุ้มมวล m ที่เคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกาอันเดอร์แดมพ์เพนดูลัม ภายใต้แรงภายนอกโคไซน์ $f_0 \cos(\omega_f t)$ กระทำต้องลูกตุ้มมวล m และแรงต้านทานอากาศ $\vec{f}_d = -k_d \vec{v}$ โดยการกำหนดค่าพารามิเตอร์ความยาวเส้นเชือก ℓ ให้มีความสอดคล้องกับปฏิบัติการทดลองเรื่องการเคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกาแบบซิมเปิลเพนดูลัมในรายวิชาปฏิบัติการฟิสิกส์ 1

วิธีดำเนินการวิจัย

เมื่อดึงลูกตุ้มมวล m ให้เส้นเชือกที่มีความยาว ℓ เคลื่อนที่เบนออกจากแนวดิ่งเป็นมุม θ ด้วยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ($f_0 \cos(\omega_f t)$) ภายใต้แรงต้านทานอากาศ ($\vec{f}_d$) เมื่อปล่อยลูกตุ้มมวล m จะเห็นว่ามีแรง $-mg\sin(\theta)\hat{\theta}$ (แรงคืนตัวของลูกตุ้ม) พยายามดึงลูกตุ้มมวล m ให้กลับไป ณ ตำแหน่งสมดุลเดิม ทำให้ลูกตุ้มมวล m แกว่งกลับไปกลับมารอบตำแหน่งสมดุล ณ จุด o ในระบบพิกัดเชิงขั้วดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 การแตกแรงของลูกตุ้มมวล m ภายใต้แรงภายนอก $f_0\cos(\omega_f t)$ (Goldstein, 2002) และแรงต้านทานอากาศ $\vec{f}_d$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) ตามทิศเวกเตอร์ในแนวรัศมี $\hat{r}$ และในแนวมุม $\hat{\theta}$

ในงานวิจัยชิ้นนี้สนใจ ณ. เวลา t ใด ๆ ของลูกตุ้มมวล m ที่ถูกแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $f_0\cos(\omega_f t)$ (Gitterman, 2010) กระทำต่อลูกตุ้มมวล m ภายใต้แรงแรงต้านทานอากาศ ดูการคำนวณมีการกระจัดเชิงมุม และความเร็วเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และในงานวิจัยนี้คำนวณหาแรงตึงเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาด้วยในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) โดยที่ r คือรัศมีการเคลื่อนที่แบบวงกลม, θ คือการกระจัดเชิงมุม (Angular Displacement) ของการเคลื่อนที่แบบวงกลม จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (Atamp, 1990)

$$\sum\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} + \vec{T} - \vec{f}_d + f_0\cos(\omega_f t) = m\vec{a}$$

$$\left(mg\cos(\theta)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta}\right) - T\hat{r} - k_d\vec{v} + f_0\cos(\omega_f t)\hat{\theta} = m\vec{a} \qquad (1)$$

เนื่องจากแรงต้านทานอากาศเป็นฟังก์ชันของความเร็ว โดย k_d คือค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ และ T คือแรงตึงเส้นเชือก ดังนั้นงานในวิจัยชิ้นนี้ใช้ความเร็วพิกัดเชิงขั้ว $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ และความเร่ง $\vec{a}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$ แทนลงในสมการที่ (1) จะได้

$$\left(mg\cos(\theta)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta}\right) - T\hat{r} - k_d\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right) + f_0\cos(\omega_f t)\hat{\theta} = m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}\right) \qquad (2)$$

งานวิจัยชิ้นนี้ได้กำหนดความยาวของเส้นเชือกเท่ากับ ℓ คือรัศมี ดังนั้น $r = \ell,\ \dot{r} = \ddot{r} = 0$ แทนลงในสมการที่ (2) ดังนั้นสมการที่ (2) สามารถเขียนได้ใหม่ ดังนี้

$$\left(mg\cos(\theta)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta}\right) - T\hat{r} - k_d\ell\dot{\theta}\hat{\theta} + f_0\cos(\omega_f t)\hat{\theta} = -m\ell\dot{\theta}^2\hat{r} + m\ell\ddot{\theta}\hat{\theta} \qquad (3)$$

จากสมการที่ (3) พิจารณา เวกเตอร์หนึ่งหน่วยแนวรัศมี $\hat{r}$ จะได้

$$mg\cos(\theta) - T = -m\ell\dot{\theta}^2 \tag{4}$$

จากสมการที่ (3) พิจารณา เวกเตอร์หนึ่งหน่วยแนวการกระจัดเชิงมุม $\hat{\theta}$ จะได้

$$-mg\sin(\theta) + f_0\cos(\omega_f t) - k_d\ell\dot{\theta} = m\ell\ddot{\theta}$$

$$m\ell\ddot{\theta} + k_d\ell\dot{\theta} + mg\sin(\theta) = f_0\cos(\omega_f t)$$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{k_d}{m}\dot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = \frac{f_0}{m\ell}\cos(\omega_f t) \tag{5}$$

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor) พบว่า

$$\sin(\theta(t)) = \theta(t) - \frac{(\theta(t))^3}{3!} + \frac{(\theta(t))^5}{5!} - \frac{(\theta(t))^7}{7!} + \cdots$$

เมื่อพิจารณาการแกว่งลูกตุ้มมวล m ที่มุม θ น้อย ๆ สามารถประมาณได้ว่า $\sin(\theta(t)) = \theta(t)$ แทนลงในสมการที่ (5) ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มมวล m ที่เคลื่อนที่แบบลูกตุ้มนาฬิกาภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และแรงต้านทานอากาศ ต่อมานิยาม $\omega_g^2 = g/\ell$ และ $2\alpha_d = 2k_d/m$ แทนลงในสมการที่ (5) ซึ่งสมการที่ (5) สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\ddot{\theta}(t) + 2\alpha_d\dot{\theta}(t) + \omega_g^2\theta(t) = \frac{f_0}{m\ell}\cos(\omega_f t)$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\alpha_d\frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_g^2\theta(t) = \frac{f_0}{m\ell}\cos(\omega_f t) \tag{6}$$

สมการที่ (6) ถูกเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองแบบไม่เอกพันธ์ ซึ่งสามารถหาผลเฉลยของสมการที่ (6) ได้ ดังนี้

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_i(t)$$

ทำการคำนวณหา $\theta_h(t)$ จากสมการ

$$\ddot{\theta}(t) + 2\alpha_d\dot{\theta}(t) + \omega_g^2\theta(t) = 0 \tag{7}$$

ทำการกำหนดผลเฉลย $\theta(t) = e^{\lambda t}$ และ $\dot{\theta}(t) = \lambda e^{\lambda t}$ และ $\ddot{\theta}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ นำไปแทนลงในสมการที่ (7) จะได้

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\alpha_d\lambda e^{\lambda t} + \omega_g^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\left(\lambda^2 + 2\alpha_d\lambda + \omega_g^2\right)e^{\lambda t} = 0$$

สมการช่วยในการหาผลเฉลยของสมการที่ (7) $\lambda^2 + 2\alpha_d\lambda + \omega_g^2 = 0$ แก้สมการหารากได้ดังนี้

$$\lambda = -\alpha_d \pm \sqrt{\alpha_d^2 - \omega_g^2}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการที่ (7)

$$\theta_h(t) = e^{-\alpha_d t}\left(C_1 e^{\sqrt{\alpha_d^2-\omega_g^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha_d^2-\omega_g^2}\,t}\right) \tag{8}$$

ซึ่งในงานวิจัยนี้พิจารณา $\omega_g^2 > \alpha_d^2$ ในกรณี อันเดอร์แดมพ์ (Underdamped) สถานการณ์ของระบบลักษณะนี้ จะเรียกว่าเป็น แดมพ์น้อยเกินไป

$$\sqrt{\alpha_d^2 - \omega_g^2} = \sqrt{-\left(\omega_g^2 - \alpha_d^2\right)} = \sqrt{-1}\sqrt{\left(\omega_g^2 - \alpha_d^2\right)} = i\omega_u \tag{9}$$

ทำการแทนสมการที่ (9) ลงในสมการที่ (8) จะได้

$$\theta_h(t) = e^{-\alpha_d t}\left(C_1 e^{i\omega_u t} + C_2 e^{-i\omega_u t}\right)$$

$$\theta_h(t) = e^{-\alpha_d t}\left(C_1\left(\cos(\omega_u t) + i\sin(i\omega_u t)\right) + C_2\left(\cos(\omega_u t) - i\sin(i\omega_u t)\right)\right)$$

$$\theta_h(t) = e^{-\alpha_d t}\left((C_1 + C_2)\cos(\omega_u t) + (iC_1 - iC_2)\sin(i\omega_u t)\right)$$

เรากำหนดให้ $(C_1 + C_2) = \theta_0 \sin(\varphi)$ และ $(iC_1 - iC_2) = \theta_0 \cos(\varphi)$

$$\theta_h(t) = e^{-\alpha_d t}\left(\theta_0 \sin(\omega_u t)\cos(\varphi) + \theta_0 \cos(\omega_u t)\sin(\varphi)\right)$$

$$\theta_h(t) = e^{-\alpha_d t}\,\theta_0 \sin(\omega_u t + \varphi) \tag{10}$$

สมการที่ (10) เป็นผลเฉลยแบบเอกพันธ์ซึ่งไม่มีผลของแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และมีผลของแรงต้านทานอากาศ ตรงพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์ α_d ต่อไปทำการคำนวณหาผลเฉลยเฉพาะของสมการที่ (6) โดยใช้วิธีการแปรตัวพารามิเตอร์ (Method of Variation of Parameters) (Riley and Hobson, 2006) ดังนี้

กำหนด $\theta_1(t) = e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t)$ และ $\theta_2(t) = e^{-\alpha_d t}\cos(\omega_u t)$ และ $f(t) = \dfrac{f_0}{m\ell}\cos(\omega_f t)$

$$W = \begin{vmatrix} \theta_1(t) & \theta_2(t) \\ \theta_1'(t) & \theta_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t) & e^{-\alpha_d t}\cos(\omega_u t) \\ \omega_u e^{-\alpha_d t}\cos(\omega_u t) - \alpha_d e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t) & -\omega_u e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t) - \alpha_d e^{-\alpha_d t}\cos(\omega_u t) \end{vmatrix}$$

$$W = -\omega_u e^{-2\alpha_d t} \tag{11}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \theta_2(t) \\ f(t) & \theta_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\alpha_d t}\cos(\omega_u t) \\ \dfrac{f_0}{m\ell}\cos(\omega_f t) & -\omega_u e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t) - \alpha_d e^{-\alpha_d t}\cos(\omega_u t) \end{vmatrix}$$

$$W_1 = -\frac{f_0}{m\ell} e^{-\alpha_d t}\cos(\omega_u t)\cos(\omega_f t) \tag{12}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \theta_1(t) & 0 \\ \theta_1'(t) & f(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t) & 0 \\ \omega_u e^{-\alpha_d t}\cos(\omega_u t) - \alpha_d e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t) & \dfrac{f_0}{m\ell}\cos(\omega_f t) \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \frac{f_0}{m\ell} e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t)\cos(\omega_f t) \tag{13}$$

จากนิยาม

$$\frac{du_1(t)}{dt} = \frac{W_1}{W}$$

$$u_1(t) = \int_0^t \frac{W_1}{W}\,dt = \frac{f_0}{m\ell\omega_u}\int_0^t e^{\alpha_d t}\cos(\omega_u t)\cos(\omega_f t)\,dt$$

จากสมการข้างต้น ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $2\cos(A)\cos(B) = \cos(A-B) + \cos(A+B)$ (Murray and John, 1999) สามารถเขียน $u_1(t)$ ได้ใหม่ คือ

$$u_1(t) = \frac{f_0}{2m\ell\omega_u}\int_0^t e^{\alpha_d t}\left(\cos\left((\omega_u - \omega_f)t\right) + \cos\left((\omega_u + \omega_f)t\right)\right)dt \tag{14}$$

จากสมการที่ (14) ใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน (Murray and John, 1999) จะได้

$$u_1(t) = \frac{f_0}{2m\ell\omega_u}\left(\frac{e^{\alpha_d t}\left(\alpha_d \cos\left((\omega_u - \omega_f)t\right) + (\omega_u - \omega_f)\sin\left((\omega_u - \omega_f)t\right)\right)}{\alpha_d^2 + (\omega_u - \omega_f)^2}\right.$$

$$+\frac{e^{\alpha_d t}\left(\alpha_d\cos\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)+\left(\omega_u+\omega_f\right)\sin\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\Bigg)$$

$$-\frac{f_0}{2m\ell\omega_u}\left(\frac{\alpha_d}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}+\frac{\alpha_d}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\right) \tag{15}$$

จากนิยาม

$$\frac{du_2(t)}{dt}=\frac{W_2}{W}$$

$$u_2(t)=\int_0^t\frac{W_2}{W}\,dt=-\frac{f_0}{m\ell\omega_u}\int_0^t e^{\alpha_d t}\sin\left(\omega_u t\right)\cos\left(\omega_f t\right)dt$$

$$u_2(t)=-\frac{f_0}{2m\ell\omega_u}\int_0^t e^{\alpha_d t}\left(\sin\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)+\sin\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)\right)dt$$

$$u_2(t)=-\frac{f_0}{2m\ell\omega_u}\Bigg(\frac{e^{\alpha_d t}\left(\alpha_d\sin\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)-\left(\omega_u-\omega_f\right)\cos\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}$$

$$+\frac{e^{\alpha_d t}\left(\alpha_d\sin\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)-\left(\omega_u+\omega_f\right)\cos\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\Bigg)$$

$$+\frac{f_0}{2m\ell\omega_u}\left(-\frac{\left(\omega_u-\omega_f\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}-\frac{\left(\omega_u+\omega_f\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\right) \tag{16}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการที่ (6) เป็นดังนี้ $\theta_i(t)=u_1(t)\theta_1(t)+u_2(t)\theta_2(t)$

$$\theta_i(t)=\frac{f_0\,e^{-\alpha_d t}\sin\left(\omega_u t\right)}{2m\ell\omega_u}\Bigg(\frac{e^{\alpha_d t}\left(\alpha_d\cos\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)+\left(\omega_u-\omega_f\right)\sin\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}-\frac{\alpha_d}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}$$

$$-\frac{\alpha_d}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}+\frac{e^{\alpha_d t}\left(\alpha_d\cos\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)+\left(\omega_u+\omega_f\right)\sin\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\Bigg)$$

$$-\frac{f_0\,e^{-\alpha_d t}\cos\left(\omega_u t\right)}{2m\ell\omega_u}\Bigg(\frac{\left(\omega_u-\omega_f\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}+\frac{\left(\omega_u+\omega_f\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}$$

$$+\frac{e^{\alpha_d t}\left(\alpha_d\sin\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)-\left(\omega_u-\omega_f\right)\cos\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}$$

$$+\frac{e^{\alpha_d t}\left(\alpha_d\sin\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)-\left(\omega_u+\omega_f\right)\cos\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\Bigg) \tag{17}$$

การกระจัดเชิงมุมของลูกตุ้มมวล m คือนำสมการที่ (10) และสมการที่ (17) มาบวกกันจะได้

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta_0 e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t+\varphi)+\frac{f_0\sin(\omega_u t)}{2m\ell\omega_u}\left(\frac{\left(\alpha_d\cos\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)+\left(\omega_u-\omega_f\right)\sin\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}\right.\\ &\left.-\frac{\alpha_d e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}-\frac{\alpha_d e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}+\frac{\left(\alpha_d\cos\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)+\left(\omega_u+\omega_f\right)\sin\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\right)\\ &-\frac{f_0\cos(\omega_u t)}{2m\ell\omega_u}\left(\frac{\left(\omega_u-\omega_f\right)e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}+\frac{\left(\alpha_d\sin\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)-\left(\omega_u-\omega_f\right)\cos\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}\right.\\ &\left.+\frac{\left(\omega_u+\omega_f\right)e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}+\frac{\left(\alpha_d\sin\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)-\left(\omega_u+\omega_f\right)\cos\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

สมการที่ (18) คือการกระจัดเชิงมุม (Angular Displacement) ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีผลของแรงภายนอก $f_0\cos(\omega_f t)$ โดยที่ f_0 เป็นแรงภายนอกเริ่มต้น $\omega_f = 2\pi f$ และมีผลของแรงต้านทานอากาศ $\vec{f}_d = -k_d\vec{v}$ โดยที่ k_d เป็นค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ งานวิจัยชิ้นนี้ยังสามารถคำนวณเกี่ยวกับ ความเร็วเชิงมุม (Angular Velocity) ของลูกตุ้มมวล m โดยหาอนุพันธ์ของสมการที่ (18) เทียบกับเวลาดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= \theta_0\omega_u e^{-\alpha_d t}\cos(\omega_u t+\varphi)-\theta_0\alpha_d e^{-\alpha_d t}\sin(\omega_u t+\varphi)\\ &+\frac{f_0\cos(\omega_u t)}{2m\ell}\left(\frac{\left(\alpha_d\cos\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)+\left(\omega_u-\omega_f\right)\sin\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}-\frac{\alpha_d e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}\right.\\ &\left.-\frac{\alpha_d e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}+\frac{\left(\alpha_d\cos\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)+\left(\omega_u+\omega_f\right)\sin\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\right)\\ &+\frac{f_0\sin(\omega_u t)}{2m\ell\omega_u}\left(\frac{\alpha_d^2 e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}+\frac{\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)^2\cos\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)-\alpha_d\left(\omega_u-\omega_f\right)\sin\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}\right.\\ &\left.+\frac{\alpha_d^2 e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}+\frac{\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)^2\cos\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)-\alpha_d\left(\omega_u+\omega_f\right)\sin\left(\left(\omega_u+\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u+\omega_f\right)^2}\right)\\ &+\frac{f_0\sin(\omega_u t)}{2m\ell}\left(\frac{\left(\omega_u-\omega_f\right)e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}+\frac{\left(\alpha_d\sin\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)-\left(\omega_u-\omega_f\right)\cos\left(\left(\omega_u-\omega_f\right)t\right)\right)}{\alpha_d^2+\left(\omega_u-\omega_f\right)^2}\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{(\omega_u+\omega_f)e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+(\omega_u+\omega_f)^2}+\frac{\left(\alpha_d\sin((\omega_u+\omega_f)t)-(\omega_u+\omega_f)\cos((\omega_u+\omega_f)t)\right)}{\alpha_d^2+(\omega_u+\omega_f)^2}\Bigg)$$

$$-\frac{f_0\cos(\omega_u t)}{2m\ell\omega_u}\left(\frac{\left(\alpha_d(\omega_u-\omega_f)\cos((\omega_u-\omega_f)t)+(\omega_u-\omega_f)^2\sin((\omega_u-\omega_f)t)\right)}{\alpha_d^2+(\omega_u-\omega_f)^2}-\frac{\alpha_d(\omega_u-\omega_f)e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+(\omega_u-\omega_f)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\alpha_d(\omega_u+\omega_f)\cos((\omega_u+\omega_f)t)+(\omega_u+\omega_f)^2\sin((\omega_u+\omega_f)t)\right)}{\alpha_d^2+(\omega_u+\omega_f)^2}-\frac{\alpha_d(\omega_u+\omega_f)e^{-\alpha_d t}}{\alpha_d^2+(\omega_u+\omega_f)^2}\right) \quad (19)$$

สมการที่ (19) คือความเร็วเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีผลของแรงภายนอก $f_0\cos(\omega_f t)$ (Quiroga and Ospina-Henao, 2017) โดยที่ f_0 เป็นแรงภายนอกเริ่มต้น $\omega_f = 2\pi f$ และมีผลของแรงต้านทานอากาศ $\vec{f}_d = -k_d\vec{v}$ โดยที่ k_d เป็นค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ งานวิจัยชิ้นนี้ยังสามารถคำนวณเกี่ยวกับแรงตึกเส้นเชือก จากสมการที่ (4) เราสามารถคำนวณหาแรงตึงเส้นเชือกของลูกตุ้มมวล m ได้ โดยเราทำการกระจายอนุกรมเทยเลอร์ (Taylor) ของ

$$\cos(\theta(t)) \approx 1-\frac{(\theta(t))^2}{2!}+\frac{(\theta(t))^4}{4!}-\frac{(\theta(t))^6}{6!}+\cdots$$

เมื่อพิจารณาการแกว่งของลูกตุ้มมวล m ที่มุม θ น้อย ๆ เราสามารถประมาณได้ว่า

$$\cos(\theta(t)) = 1-\frac{(\theta(t))^2}{2!}$$

สมการที่ (4) สามารถเขียนได้ในกรณีที่มุมในการแกว่งน้อยดังนี้

$$mg\cos(\theta) - T = -m\ell\dot{\theta}^2$$

$$mg\left(1-\frac{(\theta(t))^2}{2!}\right) - T = -m\ell\dot{\theta}^2$$

$$T_t(t) = mg\left(1-\frac{(\theta(t))^2}{2!}\right)+m\ell\dot{\theta}^2 \quad (20)$$

นำสมการที่ (18) การกระจัดเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และสมการที่ (19) ความเร็วเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m แทนลงในสมการที่ (20) จะได้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงตึงเส้นเชือก (Coulton and Foote, 2009) กับเวลาที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ความยาวเส้นเชือก ℓ และพารามิเตอร์ของแรงเริ่มต้นภายนอก f_0

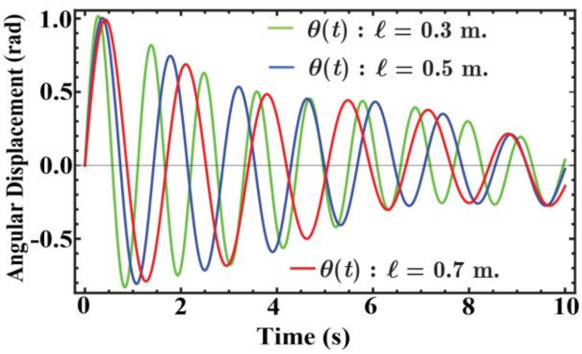
ตารางที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต้น, ตัวแปรตาม, และตัวแปรควบคุม

ปริมาณคำนวณ(ตัวแปรตาม)	ตัวแปรควบคุม	ตัวแปรต้น
การกระจัดเชิงมุม $\left(\theta(t)\right)$	$m = 0.25kg, \theta_0 = 1\ a.u.\ f_0 = 0.15\ N$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2$ $k_d = 0.16$ a.u.	$\ell = 0.3$ เมตร(m) $\ell = 0.5$ เมตร(m) $\ell = 0.7$ เมตร(m)
	$m = 0.25kg, \theta_0 = 1\ a.u.\ \ell = 0.5\ m$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2$ $k_d = 0.16$ a.u.	$f_0 = 0.3$ นิวตัน(N) $f_0 = 0.6$ นิวตัน(N) $f_0 = 0.9$ นิวตัน(N)
	$m = 0.25kg, \theta_0 = 1\ a.u.\ f_0 = 0.15\ N$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2\ \ell = 0.5\ m$	$k_d = 0.12$ a.u. $k_d = 0.14$ a.u. $k_d = 0.16$ a.u.
	$m = 0.25kg, f_0 = 0.15\ N\ \ell = 0.5\ m$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2$ $k_d = 0.16$ a.u.	$\theta_0 = 0.5$ a.u. $\theta_0 = 0.6$ a.u. $\theta_0 = 0.7$ a.u.
ความเร็วเชิงมุม $\left(\dot{\theta}(t)\right)$	$m = 0.25kg, \theta_0 = 1\ a.u.\ f_0 = 0.15\ N$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2$ $k_d = 0.16$ a.u.	$\ell = 0.3$ เมตร(m) $\ell = 0.5$ เมตร(m) $\ell = 0.7$ เมตร(m)
	$m = 0.25kg, \theta_0 = 1\ a.u.\ \ell = 0.5\ m$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2$ $k_d = 0.16$ a.u.	$f_0 = 0.3$ นิวตัน(N) $f_0 = 0.6$ นิวตัน(N) $f_0 = 0.9$ นิวตัน(N)
	$m = 0.25kg, \theta_0 = 1\ a.u.\ f_0 = 0.15\ N$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2\ \ell = 0.5\ m$	$k_d = 0.12$ a.u. $k_d = 0.14$ a.u. $k_d = 0.16$ a.u.
	$m = 0.25kg, f_0 = 0.15\ N\ \ell = 0.5\ m$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2$ $k_d = 0.16$ a.u.	$\theta_0 = 0.5$ a.u. $\theta_0 = 0.6$ a.u. $\theta_0 = 0.7$ a.u.
แรงตึงเชือก $\left(T_t(t)\right)$	$m = 0.25kg, \theta_0 = 1\ a.u.\ f_0 = 0.15\ N$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2$ $k_d = 0.16$ a.u.	$\ell = 0.3$ เมตร(m) $\ell = 0.5$ เมตร(m) $\ell = 0.7$ เมตร(m)
	$m = 0.25kg, \theta_0 = 1\ a.u.\ \ell = 0.5\ m$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2$ $k_d = 0.16$ a.u.	$f_0 = 0.3$ นิวตัน(N) $f_0 = 0.6$ นิวตัน(N) $f_0 = 0.9$ นิวตัน(N)
	$m = 0.25kg, \theta_0 = 1\ a.u.\ f_0 = 0.15\ N$ $f = 0.15Hz\ g = 9.8\ m/s^2\ \ell = 0.5\ m$	$k_d = 0.12$ a.u. $k_d = 0.14$ a.u. $k_d = 0.16$ a.u.

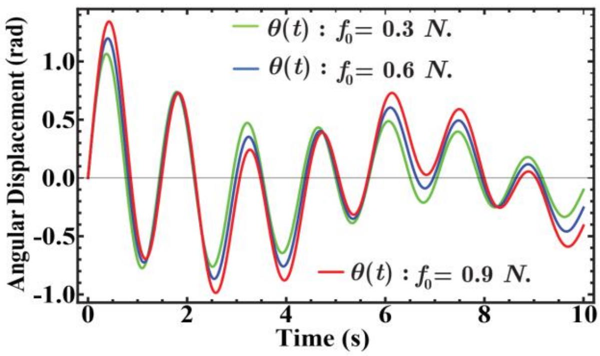
$m = 0.25kg$, $f_0 = 0.15\ N$ $\ell = 0.5\ m$	$\theta_0 = 0.5$ a.u.
$f = 0.15Hz$ $g = 9.8\ m/s^2$	$\theta_0 = 0.6$ a.u.
$k_d = 0.16$ a.u.	$\theta_0 = 0.7$ a.u.

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

จากสมการที่ (18) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดเชิงมุมกับเวลา ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แสดงกราฟการกระจัดเชิงมุม 4 ลักษณะตามตัวแปรต้น เช่น ความยาวเส้นเชือกที่เปลี่ยนค่าจาก $\ell = 0.3 \rightarrow 0.7$ เมตร และค่าของแรงเริ่มต้นแรงภายนอกที่เปลี่ยนค่าจาก $f_0 = 0.3 \rightarrow 0.9$ นิวตัน และค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.12 \rightarrow 0.16$ a.u. และค่าแอมพลิจูด $\theta_0 = 0.5 \rightarrow 0.7$ a.u. เป็นต้น ดังรูปที่ 2 (ก) และ 2(ข) และรูปที่ 3 (ก) และ 3(ข)



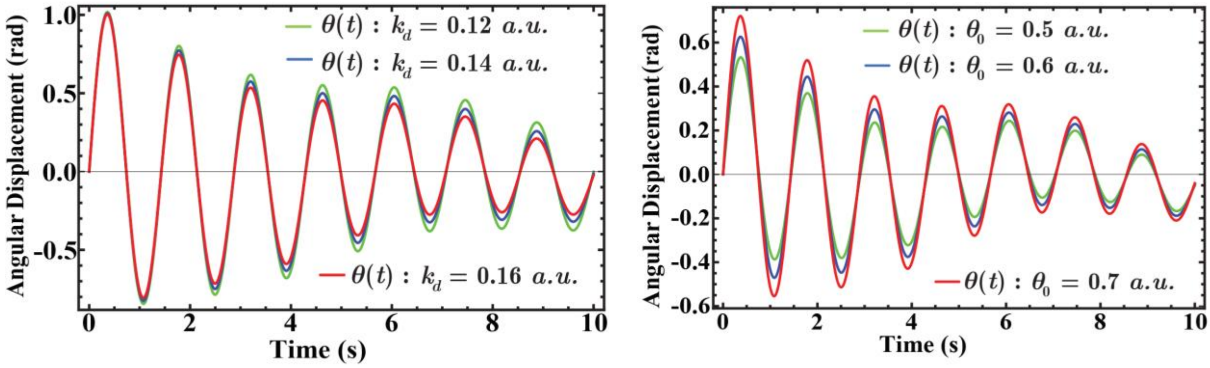
(ก)



(ข)

รูปที่ 2 (ก) แสดงกราฟการกระจัดเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ขนาดความยาวเส้นเชือกที่เปลี่ยนค่าจาก $\ell = 0.3 \rightarrow 0.7$ เมตร (ข) แสดงกราฟการกระจัดเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ค่าของแรงเริ่มต้นแรงภายนอกที่เปลี่ยนจาก $f_0 = 0.3 \rightarrow 0.9$ นิวตัน

จากรูปที่ 2 (ก) กราฟสีเขียวแสดงลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเมื่อค่าขนาดความยาวเส้นเชือก $\ell = 0.3$ เมตร กราฟสีน้ำเงินแสดงลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเมื่อค่าขนาดความยาวเส้นเชือก $\ell = 0.5$ เมตร กราฟสีแดงแสดงลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเมื่อค่าขนาดความยาวเส้นเชือก $\ell = 0.7$ เมตร ถ้าค่าขนาดความยาวเส้นเชือกเพิ่มมากขึ้นจะส่งผลให้ลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมตรงแอมพลิจูดมีขนาดลดลง แต่ค่าของความยาวคลื่นของการสั่นของการกระจัดเชิงมุมมีขนาดเพิ่มขึ้นจากเส้นกราฟสีเขียวไปเป็นเส้นกราฟสีแดงซึ่งมีค่าความยาวคลื่นมาก ลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเป็นแบบ อันเดอร์แดมพ์ จากรูปที่ 2 (ข) ถ้าค่าของแรงเริ่มต้นแรงภายนอกเพิ่มมากขึ้นแอมพลิจูดของลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมมีขนาดเพิ่มขึ้นแต่ลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมจะไม่ใช่ อันเดอร์แดมพ์ (Jin Wang et.al., 2022) จะกลายเป็น คลื่นกลุ่ม (wave group)

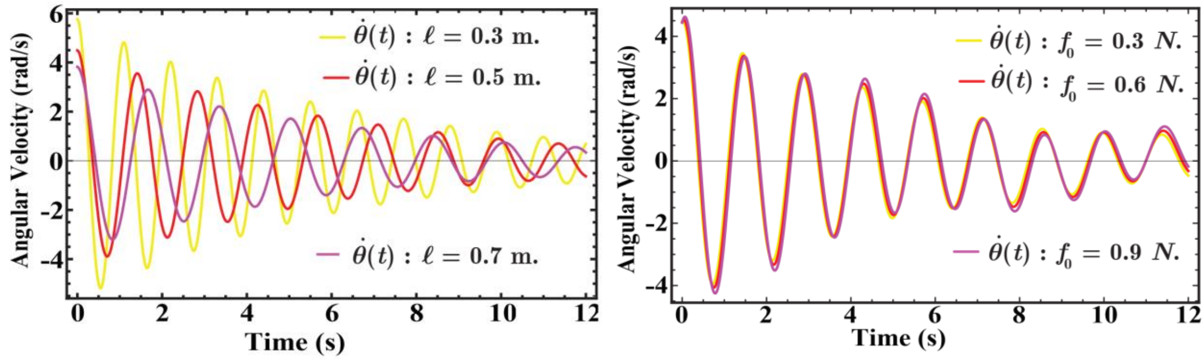


(ก) (ข)

รูปที่ 3 (ก) แสดงกราฟการกระจัดเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศเปลี่ยนจาก $k_d = 0.12 \rightarrow 0.16\,\text{a.u.}$ (ข) แสดงกราฟการกระจัดเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบเปลี่ยนจาก $\theta_0 = 0.5 \rightarrow 0.7\,\text{a.u.}$

จากรูปที่ 3 (ก) กราฟสีเขียวแสดงลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.12\,\text{a.u.}$ กราฟสีน้ำเงินแสดงลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.14\,\text{a.u.}$ กราฟสีแดงแสดงลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.16\,\text{a.u.}$ ถ้าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศมีค่าเพิ่มขึ้น แอมพลิจูดลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมลดลง แสดงว่าค่าพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศแปรผกผันกับลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุม จากรูปที่ 3 (ข) กราฟสีเขียวแสดงลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเมื่อค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบ $\theta_0 = 0.5\,\text{a.u.}$ กราฟสีน้ำเงินแสดงลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเมื่อค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบ $\theta_0 = 0.6\,\text{a.u.}$ กราฟสีแดงแสดงลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุมเมื่อค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบ $\theta_0 = 0.7\,\text{a.u.}$ โดยค่า $\theta_0 = 0.5 \rightarrow 0.7\,\text{a.u.}$ ได้นำค่าโดยประมาณมาจากงานวิจัย Rafat K. (Rafat, 2016) ถ้าค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบเพิ่มมากขึ้น จะทำให้ลักษณะแอมพลิจูดการสั่นของการกระจัดเชิงมุมลูกตุ้มมวล m มีขนาดเพิ่มมากขึ้นเมื่อเวลาผ่าน แสดงว่า ค่าพารามิเตอร์แอมพลิจูดการสั่นแปรผันโดยตรงกับการกระจัดเชิงมุม (อันเดอร์แดมพ์)

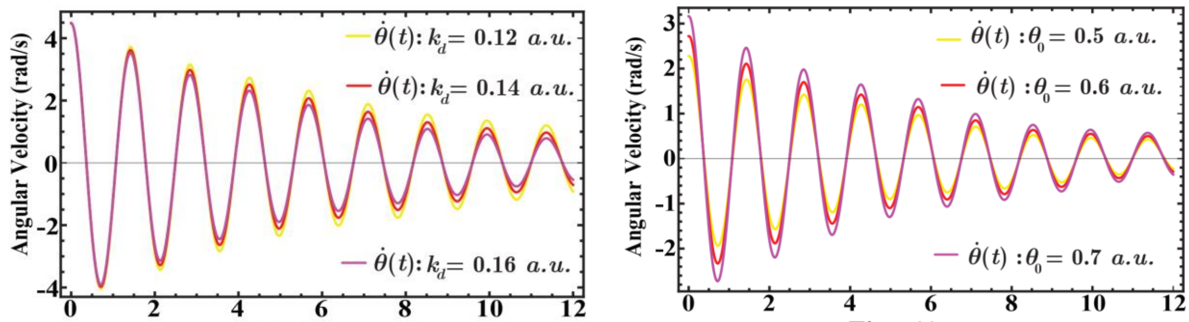
จากสมการที่ (19) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงมุมกับเวลา ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แสดงกราฟความเร็วเชิงมุมมี 4 ลักษณะตามตัวแปรต้น เช่น ความยาวเส้นเชือกที่เปลี่ยนค่าจาก $\ell = 0.3 \rightarrow 0.7$ เมตร และค่าของแรงเริ่มต้นแรงภายนอกที่เปลี่ยนจาก $f_0 = 0.3 \rightarrow 0.9$ นิวตัน และค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศเปลี่ยนจาก $k_d = 0.12 \rightarrow 0.16\,\text{a.u.}$ (Pouya et.al., 2014) และค่าแอมพลิจูดของการสั่นของความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนจาก $\theta_0 = 0.5 \rightarrow 0.7\,\text{a.u.}$ เป็นต้น ดังรูปที่ 4 (ก) และ 4(ข) และรูปที่ 5 (ก) และ 5(ข)



(ก) (ข)

รูปที่ 4 (ก) แสดงกราฟความเร็วเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ขนาดความยาวเส้นเชือกที่เปลี่ยนค่าจาก $\ell = 0.3 \rightarrow 0.7$ เมตร (ข) แสดงกราฟความเร็วเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ค่าของแรงเริ่มต้นแรงภายนอกที่เปลี่ยนจาก $f_0 = 0.3 \rightarrow 0.9$ นิวตัน

จากรูปที่ 4 (ก) กราฟสีเหลืองแสดงลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเมื่อค่าขนาดความยาวเส้นเชือก $\ell = 0.3$ เมตร กราฟสีแดงแสดงลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเมื่อค่าขนาดความยาวเส้นเชือก $\ell = 0.5$ เมตร กราฟสีชมพูแสดงลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเมื่อค่าขนาดความยาวเส้นเชือก $\ell = 0.7$ เมตร ถ้าค่าขนาดความยาวเส้นเชือกเพิ่มมากขึ้นจะส่งผลให้ลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมตรงแอมพลิจูดมีขนาดลดลง แต่ค่าของความยาวคลื่นของการสั่นของความเร็วเชิงมุมมีขนาดเพิ่มขึ้นจากเส้นกราฟสีเหลืองไปเป็นเส้นกราฟสีชมพูซึ่งมีค่าความยาวคลื่นมาก ลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเป็นแบบ อันเดอร์แดมพ์ ซึ่งผลการคำนวณความเร็วเชิงมุม



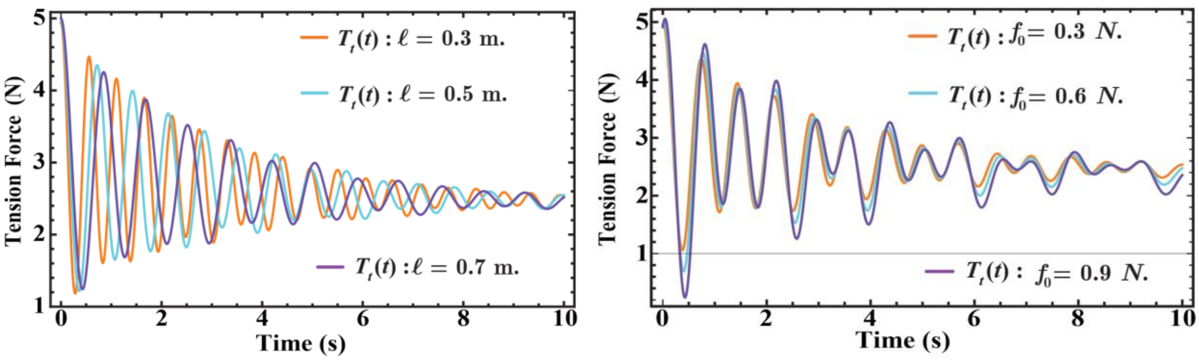
(ก) (ข)

รูปที่ 5 (ก) แสดงกราฟความเร็วเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศเปลี่ยนจาก $k_d = 0.12 \rightarrow 0.16$ a.u. (ข) แสดงกราฟความเร็วเชิงมุมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบเปลี่ยนจาก $\theta_0 = 0.5 \rightarrow 0.7$ a.u.

จากรูปที่ 5 (ก) กราฟสีเหลืองแสดงลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.12$ a.u. กราฟสีแดงแสดงลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.14$ a.u. กราฟสีชมพูแสดงลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเมื่อค่าสัมประสิทธิ์

แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.16\,\text{a.u.}$ ถ้าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศมีค่าเพิ่มขึ้น แอมพลิจูดลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมลดลง แสดงว่าค่าพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศแปรผกผันกับลักษณะการสั่นของการความเร็วเชิงมุม จากรูปที่ 5 (ข) กราฟสีเหลืองแสดงลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเมื่อค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบ $\theta_0 = 0.5\ \text{a.u.}$ กราฟสีแดงแสดงลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเมื่อค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบ $\theta_0 = 0.6\ \text{a.u.}$ กราฟสีชมพูแสดงลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $\theta_0 = 0.7\ \text{a.u.}$ ถ้าค่าค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบเพิ่มมากขึ้น จะทำให้ลักษณะแอมพลิจูดการสั่นของความเร็วเชิงมุมลูกตุ้มมวล m มีขนาดเพิ่มมากขึ้นเมื่อเวลาผ่าน แสดงว่า ค่าพารามิเตอร์แอมพลิจูดการสั่นแปรผันโดยตรงกับความเร็วเชิงมุม (อันเดอร์แดมพ์)

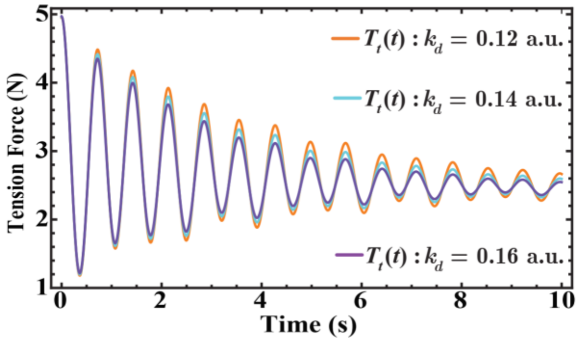
จากสมการที่ (20) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงตึงเส้นเชือกกับเวลา ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แสดงกราฟแรงตึงเส้นเชือกมี 4 ลักษณะตามตัวแปรต้น เช่น ความยาวเส้นเชือกที่เปลี่ยนค่าจาก $\ell = 0.3 \rightarrow 0.7$ เมตร และค่าของแรงเริ่มต้นแรงภายนอกที่เปลี่ยนจาก $f_0 = 0.3 \rightarrow 0.9$ นิวตัน และค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศเปลี่ยนจาก $k_d = 0.12 \rightarrow 0.16\,\text{a.u.}$ และค่าแอมพลิจูดของการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเปลี่ยนจาก $\theta_0 = 0.5 \rightarrow 0.7\,\text{a.u.}$ เป็นต้น ดังรูปที่ 6 (ก) และ 6 (ข) และรูปที่ 7 (ก) และ 7 (ข)



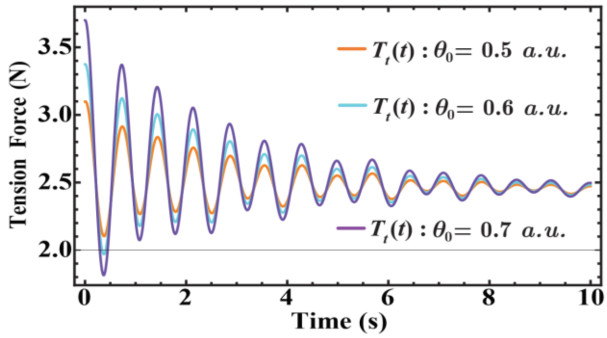
(ก) (ข)

รูปที่ 6 (ก) แสดงกราฟแรงตึงเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ขนาดความยาวเส้นเชือกที่เปลี่ยนค่าจาก $\ell = 0.3 \rightarrow 0.7$ เมตร (ข) แสดงกราฟแรงตึงเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ค่าของแรงเริ่มต้นแรงภายนอกที่เปลี่ยนจาก $f_0 = 0.3 \rightarrow 0.9$ นิวตัน

จากรูปที่ 6 (ก) กราฟสีน้ำตาลแสดงลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเมื่อค่าขนาดความยาวเส้นเชือก $\ell = 0.3\ m$ กราฟสีฟ้าน้ำทะเลแสดงลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเมื่อค่าขนาดความยาวเส้นเชือก $\ell = 0.5\ m$ กราฟสีม่วงแสดงลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเมื่อค่าขนาดความยาวเส้นเชือก $\ell = 0.7\ m$ ถ้าค่าขนาดความยาวเส้นเชือกเพิ่มมากขึ้นจะส่งผลให้ลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกตรงแอมพลิจูดมีขนาดลดลง แต่ค่าของความยาวคลื่นของการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกมีขนาดเพิ่มขึ้นจากเส้นกราฟสีเหลืองไปเป็นเส้นกราฟสีชมพูซึ่งมีค่าความยาวคลื่นมาก จากรูปที่ 6 (ข) ถ้าค่าของแรงเริ่มต้นแรงภายนอกเพิ่มมากขึ้นแอมพลิจูดของลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกมีขนาดเพิ่มขึ้นแต่ลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกจะไม่ใช่อันเดอร์แดมพ์ จะกลายเป็น คลื่นกลุ่ม (wave group)



(ก)



(ข)

รูปที่ 7 (ก) แสดงกราฟแรงตึงเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศเปลี่ยนจาก $k_d = 0.12 \rightarrow 0.16$a.u. (ข) แสดงกราฟแรงตึงเส้นเชือกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อ ค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบเปลี่ยนจาก $\theta_0 = 0.5 \rightarrow 0.7$ a.u.

จากรูปที่ 7 (ก) กราฟสีน้ำตาลแสดงลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.12$a.u. กราฟสีฟ้าน้ำทะเลแสดงลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.14$a.u. กราฟสีม่วงแสดงลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $k_d = 0.16$a.u. ถ้าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศมีค่าเพิ่มขึ้น จะทำให้ลักษณะแอมพลิจูดการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกลูกตุ้มมวล m ขนาดลดลงเมื่อเวลาของการสั่นเพิ่มขึ้น (อันเดอร์แดมพ์) แสดงว่าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศแปรผกผันกับแรงตึงเส้นเชือก จากรูปที่ 7 (ข) กราฟสีน้ำตาลแสดงลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเมื่อค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบ $\theta_0 = 0.5$ a.u. กราฟสีฟ้าน้ำทะเลแสดงลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเมื่อค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบ $\theta_0 = 0.6$ a.u. กราฟสีม่วงแสดงลักษณะการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกเมื่อค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ $\theta_0 = 0.7$ a.u. ถ้าค่าค่าแอมพลิจูดการสั่นระบบเพิ่มมากขึ้น จะทำให้ลักษณะแอมพลิจูดการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกลูกตุ้มมวล m มีขนาดเพิ่มมากขึ้นเมื่อเวลาผ่าน แสดงว่าค่าพารามิเตอร์แอมพลิจูดการสั่นแปรผันโดยตรงกับแรงตึงเส้นเชือก (อันเดอร์แดมพ์)

สรุปผลการวิจัย

ถ้าค่าขนาดความยาวเส้นเชือกเพิ่มมากขึ้นจะส่งผลให้ลักษณะการสั่นของการกระจัดเชิงมุม และความเร็วเชิงมุมตรงแอมพลิจูดมีขนาดลดลง แต่ค่าของความยาวคลื่นของการสั่นของการกระจัดเชิงมุม และความเร็วเชิงมุมมีขนาดเพิ่มขึ้นจากเส้นกราฟสีเขียวไปเป็นเส้นกราฟสีแดงซึ่งมีค่าความยาวคลื่นมาก ถ้าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศมีค่าเพิ่มขึ้น แอมพลิจูดลักษณะการสั่นของความเร็วเชิงมุมลดลง แสดงว่าค่าพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศแปรผกผันกับลักษณะการสั่นของการความเร็วเชิงมุม ถ้าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศมีค่าเพิ่มขึ้น จะทำให้ลักษณะแอมพลิจูดการสั่นของแรงตึงเส้นเชือกลูกตุ้มมวล m ขนาดลดลงเมื่อเวลาของการสั่นเพิ่มขึ้น (อันเดอร์แดมพ์) แสดงว่าค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศแปรผกผันกับแรงตึงเส้นเชือก

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

Atamp, A. (1990). *Introduction to classical mechanics*. (pp. 336-340). United States America: Prentice-Hall.

Coulton, P. and Foote, R. (2009). The dynamics of pendulums on surfaces of constant Curvature. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, *12*: 97–107.

Gitterman, M. (2010). Spring pendulum: Parametric excitation vs an external force. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 389*(16): 3101–3108.

Goldstein, P. S. (2002). *Classical Mechanics* (3th ed.). (pp. 265-271). United States America: Prentice-Hall.

Jin Wang, Qilong Xue, Lixin Li, Baolin Liu, Leilei Huang and Yang Chen. (2022). Dynamic analysis of simple pendulum model under variable damping. *Alexandria Engineering Journal 61*(12): 10563–10575.

Murray, R. S. and John, L. (1999). *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* (2rd ed.). (pp. 46-97). New York: Mcgraw-hill.

Pouya, J. l., Patrick, K., MohammadHady, M. and William, W. (2014). Computational aerodynamics of baseball, soccer ball and Volleyball. *American Journal of Sports Science, 2*(5): 115-121.

Quiroga, G. D. and Ospina-Henao, P. A. (2017). Dynamics of damped oscillations: physical pendulum. *European Journal of Physics, 38*(6): 1-15.

Rafat, K. (2014). Movement of Double Mathematical Pendulum with Variable Mass. *Machine Dynamics Research*, *38*: 47–58.

Rafat, K. (2016). Dynamic analysis of double pendulum with variable mass and initial velocities. *Procedia Engineering, 136*: 175 – 180.

Riley, K. F. and Hobson, M. P. (2006). *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (3th ed.). New York: Cambridge University Press.